第一章

绪　论

内容提要

一、工程流体力学的研究对象、任务和方法

工程流体力学是工程力学的一组成部分，属于应用科学范畴，是研究流体机械运动规律及其在工程实际中应用的一门学科。它研究流体流动的基本规律：流体流过某种通道或绕过某种物体时速度分布、压力分布、能量损失及流体同固体间的相互作用。同时，作为基础和满足工程实际需要，它也研究流体平衡时的条件及其压力分布规律。

流体力学有三种研究方法，分别是理论方法、实验方法和计算方法，对应三个学科方向为理论流体力学、实验流体力学及计算流体力学。

二、流体质点与连续介质概念

1. **流体质点**

所谓流体质点就是流体中宏观尺寸非常小，而微观尺寸又足够大的任意一个物理实体，流体质点具有下述几层含义：

(1) 流体质点的宏观尺寸非常小；

(2) 流体质点的微观尺寸足够大；

(3) 流体质点是包含有足够多分子在内的一个物理实体，因而在任何时刻都应该具有统计规律的宏观物理量；

(4) 流体质点的形状可以任意划定。

2. 连续介质概念(假设)

任意流体都由无数分子组成的，分子之间有空隙，从微观上看，流体并不是连续分布的物质。但是，流体力学并不研究微观分子的运动，而只研究流体的宏观机械运动。

在研究流体的宏观运动中，所取的最小的流体微元是体积为无穷小的微团，或称流体质点。流体微团虽小，但却包含了为数甚多的分子。这样，可以不考虑、分子间存在的空隙，而把流体视为无数连续分布的流体微团所组成的连续介质。这就是流体的连续介质假设。

当流体力学中把流体作为连续介质处理后，那么表征流体属性的物理量一般在空间也是连续分布的。如密度 ρ、速度 v、压强 P、温度 T 等。

三、流体的密度、比体积和相对密度

流体的密度(均质)

$$\rho = \frac{m}{V}(\mathrm{kg/m^3}) \qquad (1-1)$$

流体的比体积

$$v = \frac{V}{m}(\mathrm{m^3/kg}) \qquad (1-2)$$

流体的相对密度

$$d = \frac{m}{m_w} = \frac{\rho}{\rho_w} = \frac{v_w}{v} \qquad (1-3)$$

其中比体积与密度存在倒数关系

$$\rho = \frac{1}{v} \qquad (1-4)$$



四、流体的压缩性和膨胀性

随着压强的增高，体积便缩小，随着温度的升高，体积便膨胀，这就是所有流体的共同属性，即流体的压缩性和膨胀性。

1. 方程表示法

反映气体压缩性和膨胀性的关系式就是物理上已学过的理想气体的状态方程式

$$pV = mR_g T \tag{1-4}$$

或：

$$pv = R_g T \tag{1-5}$$

$$\frac{p}{\rho} = R_g T \tag{1-6}$$

其中 R_g 为气体常数　$R_g = \dfrac{8\ 314}{M}$ J/(kg · K)

2. 系数表示法

(1) 压缩系数

流体的压缩性用单位压强所引起的体积变化率表示，称为压缩系数，以 k 表示之。当温度不变时，压缩系数由下式确定

$$k = \frac{\delta V/V}{\delta p} = \frac{\delta V}{V\delta p} \tag{1-7}$$

式中 δp 为压强的增量，$\delta V/V$ 流体相应的体积变化率。k 的单位为 Pa^{-1}。式(1－7)表明，对于同样的压强增量，k 值大的流体，其体积变化率大，较易压缩；k 值小的流体，其体积变化率小，较难压缩。

(2) 体积模量

压缩系数的倒数为体积模量，用 K 表示

$$K = \frac{1}{k} = \frac{V\delta p}{\delta V} \tag{1-8}$$

工程上常用体积模量去衡量流体压缩性的大小。显然，K 值大的流体的压缩性小，K 值小的流体压缩性大。K 的单位

与压强相同，为 Pa。

(3) 体胀系数

流体的膨胀性用增加单位温度所引起的体积变化率表示，称为体胀系数，以 α_v 表示。当压强不变时

$$\alpha_v = \frac{\delta V/V}{\delta T} = \frac{\delta V}{V\delta T} \qquad (1-9)$$

式中 δT 为温度的增量，$\delta V/V$ 仍为流体相应的体积变化率。由于温度升高，体积膨胀的 δT 与 δV 同号，α_v 单位为 $1/K$ 或 1/℃。

3. **不可压缩流体的概念**

为了研究问题的方便，规定等温压缩率和体胀系数完全为零的流体叫不可压缩流体。这种流体受压体积不减小，受热体积不膨胀，因而其密度、比体积和相对密度均为恒定常数。这样讨论运动和平衡规律简单得多。

绝对不可压缩的流体实际上并不存在，但是在通常条件下，液体以及低速运动的气体的压缩性对其运动和平衡问题并无太大影响，忽略其可压缩性，而直接用不可压缩流体理论分析，所得结果与实际情况有时是非常接近的。

五、流体的粘性

流体的粘性是指流体微团间发生相对滑移时产生切向阻力的性质。粘性是固体所没有的性质，流体处于平衡状态时，其粘性无从表现，只有当流体运动时，流体的粘性才显示出来。

1. **牛顿内摩擦定律**

为理解流体的粘性，取两块相互平行的平板进行粘性流体内摩擦实验。实验证明，流体内摩擦阻力的大小 F 与速度 v 成正比，与接触面 A 成正比，而与两板间的距离 h 成反比

$$F = \mu A v/h \qquad (1-10)$$

式中，μ 为流体的动力粘度，单位为 Pa·s。在一定温度和压强下，它是个常数。



单位面积上的切向阻力称为切向应力，用 τ 表示，单位为 Pa。

$$\tau = \mu v / h \tag{1-11}$$

一般情况下，流体截面速度分布不一定是直线规律，将上式推广应用到各个薄层，即得牛顿(I·Newton)内摩擦定律

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \tag{1-12}$$

凡是切应力与速度梯度关系符合上式的叫做牛顿流体，不符合上式的叫做非牛顿流体。非牛顿流体切应力与速度梯度关系的通式为

$$\tau = \tau_0 + \mu \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)^n \tag{1-13}$$

2. **流体的粘度**

(1) 对牛顿流体，τ 与 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ 成比例，比例系数 μ 即为流体的动力粘度。

$$\mu = \frac{\tau}{\mathrm{d}v/\mathrm{d}y}$$

(2) 在流体力学中还常引用动力粘度与密度的比值，称为运动粘度。用 ν 表示，它的单位 m^2/s。

$$\nu = \mu / \rho$$

流体的粘度与温度和压强有关，由于分子结构及分子运动机理的不同，液体和气体的粘度变化规律是不一样的。

3. **理想流体**

不具有粘性的流体称为理想流体，即 $\mu = \nu = 0$。

理想流体实际中并不存在，但这种理论模型对分析问题起很大作用。对于实际流体，总是先研究理想流体的流动，而后再研究粘性流体的流动。

六、液体的表面张力与汽化压强

由于表面层中的液体分子都受到指向液体内部的拉力，所以任何

液体分子在进入表面层时都必须反抗这种力的作用。当自由表面收缩时，在收缩的方向上必定有拉力对自由表面作用，把单位长度上的这种拉力定义为表面张力，用 σ 表示，它的单位为 N/m。毛细管现象正是液固接触面表面张力的一种体现。

 典型例题与解题技巧

【例 1】 如图 1－1(a) 所示，液面上有面积 $A = 1200\text{cm}^2$ 的平板 H，以 $v = 0.5\text{m/s}$ 的速度作水平移动，形成平行板间液体的层液运动，平板下液体分两层，它们的动力粘性系数与厚度分别为 $\mu_1 = 0.142\text{N}\cdot\text{s/m}^2$，$h_1 = 1.0\text{mm}$；$\mu_2 = 0.235\text{N}\cdot\text{s/m}^2$，$h_2 = 1.4\text{mm}$；试绘制平面间液体的流速分布图和切应力分布图，并计算平板 H 上所受的内摩擦力 F。

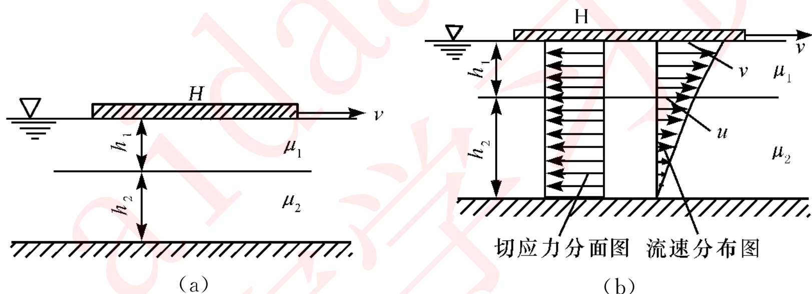


图 1－1

解题分析 本题考察平行平板间的速度及切应力分布，可直接利用牛顿内摩擦定律。

解题过程 平板间为层流，服从牛顿内摩擦定律：$\tau = \mu(\text{d}u/\text{d}y)$，设在液面分界面上，流速为 u，切应力为 τ，因 h_1，h_2 很小，可以近似认为流速按直线分布，则

上层液体的切应力 $$\tau_1 = \mu_1 \frac{v-u}{h_1} \qquad ①$$

下层液体的切应力 $$\tau_2 = \mu_2 \frac{u-0}{h_2} \qquad ②$$



在液层分界面上，切应力是相等的，即

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 \qquad ③$$

$$\mu_1 \frac{v-u}{h_1} = \mu_2 \frac{u}{h_2}$$

解得

$$u = \frac{\mu_1 h_2 v}{\mu_2 h_1 + \mu_1 h_2} = \frac{0.142 \times 0.0014 \times 0.5}{0.235 \times 0.001 + 0.142 \times 0.0014}$$

$$= 0.23\text{m/s}$$

$$\tau = \tau_1 = \mu_1 \frac{v-u}{h_1} = 0.142 \times \frac{0.5-0.23}{0.001}$$

$$= 38.34\text{N/m}^2$$

可以绘出流速分布图及切应力分布图如图 1－1(b) 所示。

平板 H 所受的内摩擦力 $F = \tau_1 A = 38.34 \times 1200 \times 10^{-4} = 4.6\text{N}$。



历年考研真题评析

【题 1】 （清华大学 2005 年）1 千克质量的氢气，温度为－40℃，密闭在 0.1 米^3 的容器中，问压强为多少 KN/m^2。

解题分析　本题可以直接利用气体的状态方程。

解题过程　因氢分子量 $M = 2.016$，氢的气体常数为

$$R_g = \frac{8312}{M} = \frac{8312}{2.016}$$

$$= 4123\text{J/kg} \cdot \text{K}$$

氢气的密度 $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{1}{0.1} = 10\text{kg/m}^3$

将已得各值代入，得氢气的压强为

$$p = \rho R_g T$$

$$= 10 \times 4123 \times (273-40)$$

$$= 9.6 \times 10^6 \text{N/m}^2 = 9600\text{KN/m}^2$$

【题 2】 （华南理工大学 2006 年）一无限大平板在另一固定平面上作如图 1－2 所示的平行运动，$v = 0.3\text{m/s}$，间隙高

$h=0.3\text{mm}$，其中充满比重为 $\sigma=0.88$、粘度为 $\mu=0.65\times10^{-3}\text{Pa}\cdot\text{s}$ 的流体，间隙中的流速为线性分布。试求：(1) 流体的运动粘度 v；(2) 上平板壁面上的切应力 $\tau_{上}$ 及其方向；(3) 下平面壁面上的切应力 $\tau_{下}$ 及其方向。

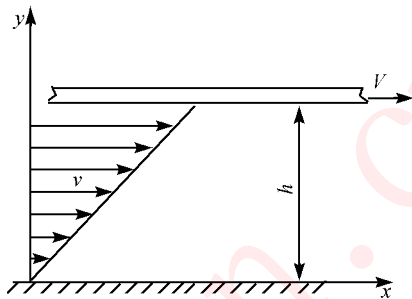


图 1－2

解题分析 本题用牛顿摩擦定律计算切应力。

解题过程 (1)$v=\dfrac{\mu}{\rho}=\dfrac{65\times10^{-5}}{0.88\times10^{3}}=7.4\times10^{-7}\text{m}^2/\text{s}$

(2) $\tau_{上}=\mu dv/dy\,|_{y=h}=\dfrac{\mu v}{h}$

$$=\frac{65\times10^{-5}\times0.3}{0.3\times10^{-3}}$$

$=0.65\text{N/m}^2$。

顺 y 轴的方向看去，上平板壁面为一负平面，故所得 τ 的正值应指向负 x 轴方向，即指向左边。

(3) $\tau_{下}=\dfrac{\mu v}{h}=0.65\text{N/m}^2$.

下平面为一正平面，故正 τ 应指向 x 轴的正方向，即指向右边。

 课后习题全解

○ **1－1.** 几种流体的相对密度、密度、比体积的已知值如下表 1－1 所示，试填写表 1－1 中空白各项数值(取三位有效数字)。



表 1—1

流　　体	相对密度 d	密度 $\rho/(kg/m^3)$	比体积 $v/(m^3/kg)$
20℃ 的润滑油	0.880		
20℃ 的液压油		860	
15℃ 的水	0.999		
15℃ 的空气			0.813
燃气轮机燃气			
柴油机废气			0.557
火箭发动机燃料	1.31		
航空汽油		650	
1 200℃ 的熔化生铁			

解:答案见表 1—2

表 1—2

流　体	d	ρ	v
20℃ 的润滑油	0.880	880	0.00114
20℃ 的液压油	0.860	860	0.00116
15℃ 的水	0.999	999	0.001
15℃ 的空气	0.00123	1.23	0.813
燃气轮机燃气			
柴油机废气	0.00180	1.80	0.557
火箭发动机燃料	1.31	1310	0.000763
航空汽油	0.650	650	0.00154
1 200℃ 的熔化生铁			

◎ **1—2.** 整桶机油质量 300 kg,油桶直径 0.6m,高 1.2m,试求机器油的密度。

[答:$\rho = 844kg/m^3$]

分析　本题考察密度定义 $\rho = \dfrac{m}{V}$。

解　油桶体积 $V = \dfrac{1}{4}\pi d^2 h$

$$\text{密度}\ \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{1}{4}\pi d^2 h}$$

$$\text{代入数据}\ \rho = \frac{300}{\frac{1}{4}\pi \times 0.6^2 \times 1.2} = 884\text{kg/m}^3$$

◎1－3. 动力车间贮气罐中压缩空气的绝对压强 $p = 10.8 \times 10^5\,\text{Pa}$，温度 $t = 30℃$，贮气罐由中间圆筒及两个半球端部组成。(如图1－3)

已知 $l = 3\text{m}$，$d = 2\text{m}$，压缩空气的气体常数 $R_g = 287\text{J/(kg·K)}$，试求压缩空气的比体积、密度及罐中压缩空气的质量。

[答：$v = 0.08\text{m}^3/\text{kg}$，$\rho = 12.5\text{kg/m}^3$，$m = 170\text{kg}$]

分析　本题考察气体的状态方程及其基本物理量的定义。

解　由
$$pv = R_g T$$
得
$$v = \frac{R_g T}{p}$$
即
$$v = \frac{287 \times (30 + 273)}{10.8 \times 10^5} = 0.08\text{m}^3/\text{kg}$$
由
$$\rho = \frac{1}{v}$$
得
$$\rho = \frac{1}{0.08} = 12.5\text{kg/m}^3$$
求气罐体积
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}\pi d^2 l + \frac{1}{6}\pi d^3 \\ &= \frac{1}{4}\pi \times 2^2 \times 3 + \frac{1}{6}\pi \times 2^3 = (3 + \frac{4}{3})\pi \\ &= 13.61\text{m}^3 \end{aligned}$$
$$m = \rho V = 12.5 \times 13.61 = 170\text{kg}$$



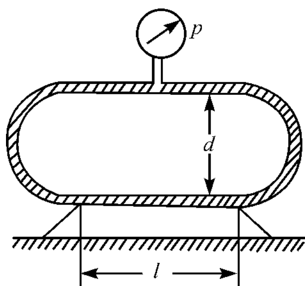


图 1－3

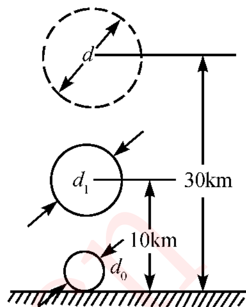


图 1－4

●**1－4.** 地面、10km、30km 米高空处的绝对压强、温度如表 1－3：

表 1－3

高程 /km	绝对压强 /kPa	温度 /℃
0	$p_0 = 101.3$	$t_0 = 20$
10	$p_1 = 26.5$	$t_1 = -50$
30	$p_3 = 1.1$	$t_3 = -40$

(1) 为了使充满氢气的探测气球在 10km 高空处膨胀为直径 $d_1 = 20\text{m}$ 的可观尺寸，试问在地面上应充入多少体积、多少质量的氢气？充入氢气后在地面上气球的直径 d_0 多大？

(2) 忽略气球的荷重，认为只要球内氢气密度小于外界环境中的空气密度，气球便会上升，试检查上述三处是否符合气球上升条件？

(3) 如果气球爆炸的极限直径 $d = 50\text{m}$，试问气球能否在 30km 米的高空处存在？(如图 1－4)

[答：(1) $V_0 = 1440\text{m}^3$，$m = 120.8\text{kg}$，$d_0 = 14\text{m}$；

(2) 符合；

(3) $d_3 = 58.6\text{m}$，不存在]

分析　本题考察气体的状态方程，认为氢气为理想状态方程 $\dfrac{pV}{T} = \text{const}$。

解 (1) 在 10km 处：$p_1 = 26.5\text{kPa}, T_1 = t_1 + 273 = 223\text{k}$

$$d_1 = 20\text{m} \qquad V_1 = \frac{1}{6}\pi d_1{}^3 = 4188.8\text{m}^3$$

在地面：$p_0 = 101.3\text{kPa} \qquad T_0 = t_0 + 270 = 293\text{k}$

由 $\dfrac{p_0 V_0}{T_0} = \dfrac{p_1 V_1}{T_1}$ 即得 $V_0 = 1440\ \text{m}^3$

查课本中表 1—3，在 20℃，101325Pa 时，氢气密度 $\rho_0^{H_2} = 0.0839\ \text{kg/m}^3$

则 $m = \rho_0^{H_2} V_0 = 0.0839 \times 1440 = 120.8\text{kg}$

由 $V_0 = \dfrac{1}{6}\pi d_0{}^3$

$$求得\ d_0 = \sqrt[3]{\frac{6V_0}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 1440}{\pi}} = 14\ \text{m}$$

(2) 查课本中表 1—3 在 20℃ 101325Pa 时空气密度 $\rho_0{}^{air} = 1.205\text{kg/m}^3$

$$\rho_0^{H_2} < \rho_0^{air}$$

∴ 在地面上气球符合上升条件。

空气、氢气均视为理想气体

则有 $\dfrac{p^{air}}{\rho^{air} T^{air}} = R_g^{air} \qquad \dfrac{p^{H_2}}{\rho^{H_2} T^{H_2}} = R_g^{H_2}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{p_0^{air}}{\rho_0^{air} T_0^{air}} = \frac{p_1^{air}}{\rho_1^{air} T_1^{air}} = \frac{p_3^{air}}{\rho_3^{air} T_3^{air}} \\ \frac{p_0^{H_2}}{\rho_0^{H_2} T_0^{H_2}} = \frac{p_1^{H_2}}{\rho_1^{H_2} T_1^{H_2}} = \frac{p_3^{H_2}}{\rho_3^{H_2} T_3^{H_2}} \end{aligned}\right\} \quad ①$$

同时，在同一高度 $\left.\begin{aligned} p^{air} = p^{H_2} \\ T^{air} = T^{H_2} \end{aligned}\right\}$ ②

由 ①② 可知 $\rho_1^{H_2} < \rho_1^{air} \qquad \rho_3^{H_2} = \rho_3^{air}$

∴ 任何高度都符合气球上升条件。

(3) 由地面和 30km 状态列方程 $\dfrac{p_0 V_0}{T_0} = \dfrac{p_3 V_3}{T_3}$

得
$$\frac{p_0 d_0{}^3}{T_0} = \frac{p_3 d_3^3}{T_3}$$



代入数据　$$\frac{101.3\times 14^3}{273+20}=\frac{1.1\times d_3^3}{273-40}$$

$d_3 = 58.6\text{m}$

d_3 大于极限直径 50m，气球已经爆炸。

小结　本题是对气体状态方程的考查，综合性较强。

◎ **1－5.** 在容积为 1.77m^3 的气瓶中，原来存在有一定量的 CO，其绝对压强为 103.4kPa，温度为 21℃。后来又用气泵输入 1.36kg 的 CO，测得输入后的温度为 24℃，试求输入后的绝对压强是多少？

[答：$p_2 = 172\text{kPa}$]

分析　将 CO 视为理想气体，用理想气体状态方程 $\frac{pV}{T}=mR_g$。

解　查课本中表 1－3　CO 气体常数　$R_g = 296.5\ \text{J/kg}\cdot\text{K}$

气瓶中原有气体质量为 m_0

$$\frac{p_0V}{T_0}=m_0R_g \quad ①$$

另输入 CO 质量为 m'，$m' = 1.36\text{kg}$.

输入后气体状态用下标"1"表示，　$$\frac{p_1V}{T_1}=m_1R_g \quad ②$$

由质量守恒　$$m_1 = m_0 + m' \quad ③$$

由 ①②③ 即有　$$\frac{p_0V}{T_0}+m'R_g=\frac{p_1V}{T_1}$$

代入数据

$$\frac{103.4\times 10^3\times 1.77}{273+21}+1.36\times 296.5=\frac{p_1\times 1.77}{273+24}$$

$$p_1 = 172\times 10^3\,\text{Pa} = 172\text{kPa}$$

◎ **1－6.** 发动机冷却水系统的总容量(包括水箱、水泵、管道、气缸水套等)为 200L。20℃ 的冷却水经过发动机后变为 80℃，假如没有风扇降温，试问水箱上部需要空出多大容积才能保证水不外溢？(如图 1－5) 已知水的体[膨]胀系数的平均值为

$$\alpha_V = 5\times 10^{-4}\,℃^{-1}$$

[答：$\Delta V = 5.8\text{L}$]

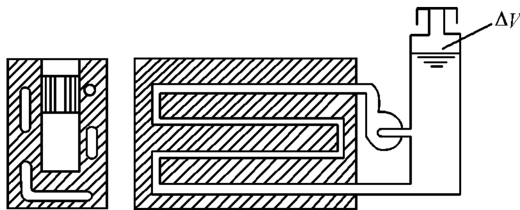


图 1－5

分析　本题考查水的膨胀系数定义，可视膨胀系数为常量。

解　由课本中式(1—13)$\alpha_V = \dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dt}$

即 $\alpha_V dt = \dfrac{1}{V}dV = d\ln V$　①

对 ① 两边积分 $\ln V_2 - \ln V_1 = \alpha_V(t_2 - t_1)$

$$\frac{V_2}{V_1} = e^{\alpha_V(t_2-t_1)} = e^{5\times10^{-4}\times60} = 1.03$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) = 200\times\left(1 - \frac{1}{1.03}\right) = 5.8\text{L}$$

○ **1－7.** 试证明流体的体[膨]胀系数、压缩率，体积模量可用比体积 v 或密度 ρ 表达为下列公式

$$\alpha_V = \frac{1}{v}\frac{dv}{dT} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

$$k_T = -\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$$

$$K = -v\frac{dp}{dv} = \rho\frac{dp}{d\rho}$$

证明　(1)　$\alpha_V = \dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{dT}$　①

$\because$　$V = mv$　②

将 ② 代入 ① 得　$\alpha_V = \dfrac{1}{mv}\dfrac{d(mv)}{dT} = \dfrac{1}{v}\dfrac{dv}{dT}$　③

$\because$　$v = \dfrac{1}{\rho}$　④

将 ④ 代入 ③ 得　$\alpha_V = \rho\dfrac{d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)}{dT} = -\rho\cdot\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{dT}$



$$=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} \quad ⑤$$

∴ $$dv=\frac{1}{v}\frac{dv}{dT}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} \quad ⑥$$

(2) $$k_T=-\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \quad ⑦$$

∵ $$V=mv \quad ⑧$$

将⑧代入⑦得 $$k_T=-\frac{1}{v}\frac{dv}{dp} \quad ⑨$$

∴ $$v=\frac{1}{\rho} \quad ⑩$$

代⑩代入⑨得 $$k_T=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \quad ⑪$$

∴ $$k_T=-\frac{1}{v}\frac{dv}{dp}=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \quad ⑫$$

(3) $$K=-V\frac{dp}{dV} \quad ⑬$$

同理分别将 $V=mv$，$v=\frac{1}{\rho}$ 代入⑬即得

$$K=-v\frac{dp}{dv}=\rho\frac{dp}{d\rho}$$

○ **1－8.** 试证明气体绝热压缩时，其体积模量 K 等于绝热指数 γ 与绝对压强 p 的乘积。

证明 气体作绝热压缩时，$pV^{\gamma}=C$ $\quad p=CV^{-\gamma}$

$$\frac{dp}{dV}=C\frac{d(V^{-\gamma})}{dV}=-\gamma CV^{-\gamma-1}$$

$$K=-V\frac{dp}{dV}=-V\cdot(-\gamma CV^{-\gamma-1})=\gamma CV^{-\gamma}=\gamma\cdot p$$

◎1－9. 已知100kPa下海平面处的海水密度为1025kg/m^3，海水体积模量的平均值为234×10^7Pa，海底绝对压强为817×10^2kPa，试求海底处海水的密度。

[答：$\rho=1061$kg/m^3]

分析 本题可利用体积模量定义的变形式积分求解。

解 如题 1－7 证明，$K=\rho\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$ 即 $\dfrac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho=\dfrac{1}{K}\mathrm{d}p$

$$\mathrm{d}\ln\rho=\frac{1}{K}\mathrm{d}p$$

积分得 $$\frac{p_2-p_1}{K}=\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

代入数据 $$\frac{817\times10^5-100\times10^3}{234\times10^7}=\ln\frac{\rho_2}{1025}$$

解得 $$\rho_2=1061\mathrm{kg/m^3}$$

◎1－10. 为了检查液压油缸的密封性，需要进行水压试验，试验前先将 $l=1.5\mathrm{m}$，$d=0.2\mathrm{m}$ 的油缸用水全部充满，然后开动试压泵向油缸再供水加压，直到压强增加了 20MPa，不出故障为止。假定水的压缩率的平均值 $k=0.5\times10^{-9}\mathrm{Pa}^{-1}$，忽略油缸变形，试求试验过程中，通过试压泵向液压缸又供应了多少水？（如图 1－6）

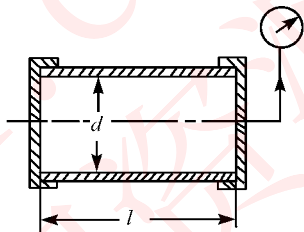


图 1－6

［答：$\Delta V=0.467$ l］

分析 此题可利用压缩率定义式积分求解，可先计算压缩后原来液体体积。

解 $$k=-\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$$

$$-k\mathrm{d}p=\frac{1}{V}\mathrm{d}V$$

积分 $$-k(p_2-p_1)=\ln\frac{V_2}{V_1}$$

代数数据 $$-0.5\times10^{-9}(20\times10^6-1.01\times10^5)=\ln\frac{V_2}{V_1}$$

其中 $V_1=\dfrac{1}{4}\pi d^2l=\dfrac{1}{4}\times\pi\times0.2^2\times1.5=0.04712$

解得 $$V_2=0.04666\mathrm{m^3}$$

$$\Delta V=V_1-V_2=0.467\times10^{-3}\mathrm{m^3}=0.467\ \mathrm{l}$$



◎ **1—11.** 某油液相对密度为0.9，不同温度的恩氏度如表1—4，试求各相应温度下的运动粘度 ν 和动力粘度 μ，并用普通坐标纸绘出 $\nu - t$，$\mu - t$ 曲线。

表1—4

温度 t/℃	20	30	40	50	60	70	80	90
恩氏底 r/°E	51	24	14	8.1	5.3	3.6	2.7	2.3

分析　恩氏粘度计的经验公式：$\nu = 7.31r - \dfrac{6.31}{r}\text{mm}^2/\text{s}$。

$$\mu = (7.31r - \frac{6.31}{r}) \times 10^{-3} d \ \text{Pa} \cdot \text{s}$$

表1—5

温度 t/℃	20	30	40	50	60	70	80	90
恩氏度 r/°E	51	24	14	8.1	5.3	3.6	2.7	2.3
运动粘度 ν mm²/s	372.7	175.2	101.9	58.43	37.55	24.56	17.40	14.07
动力粘度 μ Pa·s	0.3354	0.1577	0.09171	0.05259	0.03380	0.02211	0.01566	0.01266

◎ **1—12.** 某油液在20℃时 $r = 3.2°\text{E}$，在70℃时 $r = 1.6°\text{E}$，试求其粘温指数 λ 及其在50℃时的运动粘度 ν。

[答：$\lambda = 0.02℃^{-1}$，$v = 11.65\text{mm}^2/\text{s}$]

分析　利用恩氏粘度计的经验公式见课本中(1—33)(1—34)及粘度变化规律，见课本中式(1—37)。

解　(1) 分别求出20℃和70℃的动力粘度

$t_0 = 20℃, r = 3.2°\text{E}$　　$\mu_0 = (7.31r - \dfrac{6.31}{r}) \times 10^{-3} d = 0.01928d \ \text{Pa} \cdot \text{s}$

$t = 70℃, r = 1.6°\text{E}$　　$\mu = (7.31r - \dfrac{6.31}{r}) \times 10^{-3} d = 0.006977d \ \text{Pa} \cdot \text{s}$

单独考虑温度影响　　$\mu = \mu_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$　　①

得　　$0.006977 = 0.01928e^{-\lambda(70-20)}$

解得　　$\lambda = 0.02℃^{-1}$

(2) $t = 50℃$ 代入 ① 式得

$$\mu = 0.01928de^{-0.02(50-20)} = 0.01165d \text{ Pa·s}$$

$$v = \mu/\rho = 11.65 \text{ mm}^2/\text{s}$$

◎1－13. 底面积为 1.5m^2 薄板在液面上水平移动速度为 16m/s，液层厚度为 4mm，假定垂直于油层的水平速度为直线分布规律。如果

(1) 液体为 20℃ 的水；

(2) 液体为 20℃、相对密度为 0.921 的原油；

试分别求出移动平板的力多大？(如图 1－7)

[答：$F_1 = 6\text{N}$，$F_2 = 420\text{N}$]

分析 流体对薄板的作用力是流体粘性引起的，与速度梯度成正比 $F = \mu \dfrac{v_0}{\delta}A$。

解 (1) 查课本中表 1－11，20℃ 水 $\mu = 1.00 \times 10^{-3}\text{Pa·s}$，由课本中公式(1－19)

$$F_1 = \mu \frac{v_0}{d}A = 1.00 \times 10^{-3} \times \frac{16}{4 \times 10^{-3}} \times 1.5 = 6\text{N}$$

(2) 查课本中表 1－11，20℃ $d = 0.921$ 的原油 $\mu = 0.07\text{Pa·s}$

由课本中公式(1－19) $F = \mu \dfrac{v_0}{\delta}A$

$$F_2 = 0.07 \times \frac{16}{4 \times 10^{-3}} \times 1.5 = 420\text{N}$$

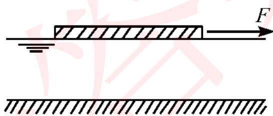


图 1－7

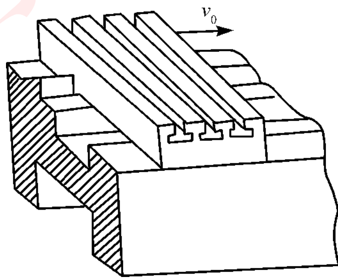


图 1－8

●1－14. 机床工作台质量 204kg，工作台与机身导轨接触面积为 300cm^2，移动速度为 1.5m/s，试求在下述两种情况下，移动工作



台所需的力与功率。

(1) 普通半干摩擦导轨、动摩擦系数 $f = 0.12$；

(2) 静压支承导轨，在接触面间建立 0.1mm 厚的油膜，油的动力粘度为 $\mu = 0.12\text{Pa}\cdot\text{s}$。(如图 1—8)

[答：(1) $F = 240\text{N}, P = 360\text{W}$；

(2) $F = 54\text{N}, P = 81\text{W}$]

分析　在干摩擦时，摩擦力与与正压力及摩擦系数有关，$F = F_N \cdot f$，而加润滑剂形成油膜后，即按流体内摩擦定律计算。

解　(1) 工作台重力 $G = mg$

所受摩擦力 $F = Gf = mgf$

$= 204 \times 9.81 \times 0.12 = 240\text{N}$

功率　$P = Fv = 240 \times 1.5 = 360\text{W}$

(2) 由内摩擦定律 $F = \mu \dfrac{v_0}{\delta} A$

得　$F = 0.12 \times \dfrac{1.5}{0.1 \times 10^{-3}} \times 300 \times 10^{-4} = 54\text{N}$

同理功率　$P = Fv = 54 \times 1.5 = 81\text{W}$

小结　本题中请注意干摩擦和流体内摩擦定律的比较。

◎1—15. 在 $\delta = 40\text{mm}$ 的两平行壁面之间充满动力粘度 $\mu = 0.7\text{Pa}\cdot\text{s}$ 的液体，在液体中有一边长为 $a = 60\text{mm}$ 的薄板以 $v_0 = 15\text{m/s}$ 的速度沿薄板所在平面内运动，假定沿铅直方向的速度分布是直线规律。

(1) 当 $h = 10\text{mm}$ 时，求薄板运动的液体阻力。

(2) 如果 h 可变，求 h 为多大时，薄板运动阻力最小？最小阻力为多大？(如图 1—9)

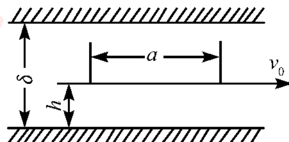


图 1—9

[答:(1) $F = 5.04\text{N}$;(2) $h = \dfrac{\delta}{2}, F_{\min} = 3.78\text{N}$]

分析 板在液体中运动时,板的两面均受到摩擦力,摩擦力可由牛顿内摩擦定律计算。

解 (1) 用 F_1 表示上部分流体对板的作用力,F_2 表示下部分流体对板的作用力

$$F_1 = \mu \frac{v_0}{\delta_1} A$$

其中 $\delta_1 = \delta - h = 40 - 10 = 30\text{mm}$

$A = a^2 = 3600\text{mm}^2$

$$F_1 = 0.7 \times \frac{15}{30 \times 10^{-3}} \times 3600 \times 10^{-6} = 1.26\text{N}$$

$$F_2 = \mu \frac{v_0}{\delta_2} A$$

其中 $\delta_2 = h = 10\text{mm}$

$$F_2 = 0.7 \times \frac{15}{10 \times 10^{-3}} \times 3600 \times 10^{-6} = 3.78\text{N}$$

$$F = F_1 + F_2 = 5.04\text{N}$$

(2) 由上分析

$$F = F_1 + F_2 = \mu \frac{v_0}{\delta_1} A + \mu \frac{v_0}{\delta_2} A = \mu v_0 A\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2}\right)$$

$$= \mu v_0 A\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\delta - h}\right)$$

对 F 求导,令 $\dfrac{\partial F}{\partial h} = 0$

即得 $h = \dfrac{\delta}{2}$

说明 $h = \dfrac{\delta}{2}$ 时,F 取得极值(极小值)

$$F_{\min} = \mu v_0 A \frac{4}{\delta} = 0.7 \times 15 \times 3600 \times 10^{-6} \times \frac{4}{4 \times 10^{-3}}$$

$$= 3.78\text{N}$$



◎1－16. 两种不相混合的液体有一个水平的交界面 $O-O$，两种液体的动力粘度分别为 $\mu_1=0.14\text{Pa}\cdot\text{s}$，$\mu_2=0.24\text{Pa}\cdot\text{s}$；两液层厚度分别为 $\delta_1=0.8\text{mm}$，$\delta_2=1.2\text{mm}$，假定速度分布为直线规律，试求推动底面积 $A=1000\text{cm}^3$ 平板在液面上以匀速 $v_0=0.4\text{m/s}$ 运动所需的力？（如图 1－10）

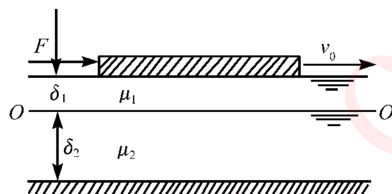


图 1－10

［答：$F=3.73\text{N}$］

分析 在交界面 $O-O$ 处，应力应处于平衡，即 $\tau_1=\tau_2$，上下两种液体速度分布均成直线规律。

解 设 $O-O$ 面上流体速度为 v

$$\tau_1=\mu_1\frac{v_0-v}{\delta_1}\qquad \tau_2=\mu_2\frac{v}{\delta_2}$$

由 $\tau_1=\tau_2$　得 $\mu_1\dfrac{v_0-v}{\delta_1}=\mu_2\dfrac{v}{\delta_2}$

即

$$0.14\frac{0.4-v}{0.8\times10^{-3}}=0.24\frac{v}{1.2\times10^{-3}}$$

$$v=0.1867\text{m/s}$$

$$\tau=\tau_1 \text{ 或 } \tau=\tau_2$$

得

$$\tau=37.3\text{N/m}^3$$

$$F=\tau A=37.3\times1000\times10^{-4}=3.73\text{N}$$

◎1－17. 已知管内液体质点的轴向速度 v 与质点所在半径 r 成抛物线型分布规律。当 $r=0$ 时，$v=v_0$；当 $r=R$ 时，$v=0$。

（1）试建立 $v=v(r)$，$\tau=\tau(r)$ 的函数关系式；

（2）如果 $R=6\text{mm}$，$v_0=3.6\text{m/s}$，$\mu=0.1\text{Pa}\cdot\text{s}$ 时，试求 $r=0$、2、4、6mm 各处的切应力。（如图 1－11）

[答:(1) $v = v_0\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$, $\tau = \dfrac{2\mu v_0 r}{R^2}$;

(2) $\tau = 0$、40、80、120Pa]

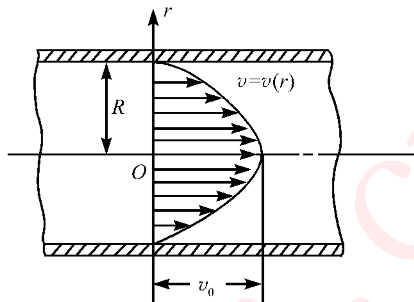


图 1—11

分析 本题根据牛顿内摩擦定律推导 τ 与 v 的关系式。

解 (1) 牛顿内摩擦定律 $\tau = \mu \dfrac{dv}{dr}$

因为 v 为 r 的二次函数,因此 $\dfrac{dv}{dr} = C_1 r$

$$v = \frac{1}{2}C_1 r^2 + C_2$$

由边界条件及已知条件

当 $r = 0$ 时,$v = v_0$ $\therefore C_2 = v_0$

当 $r = R$ 时,$v = 0$ $\therefore C_1 = -\dfrac{v_0}{R^2}$

$$\therefore \quad v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad ①$$

$$\tau = \mu \frac{dv}{dr} = \frac{2\mu v_0 r}{R^2} \quad ②$$

(2) 将数据值代入 ②

$$r = 0; \tau_0 = 0$$

$$r = 2\text{mm}; \tau_2 = \frac{2 \times 0.1 \times 3.6 \times 2 \times 10^{-3}}{(6 \times 10^{-3})^2} = 40\text{Pa}$$

$$r = 4\text{mm}; \tau_4 = \frac{2 \times 0.1 \times 3.6 \times 4 \times 10^{-3}}{(6 \times 10^{-3})^2} = 80\text{Pa}$$



$$r = 6\text{mm}; \tau_6 = \frac{2 \times 0.1 \times 3.6 \times 6 \times 10^{-3}}{(6 \times 10^{-3})^2} = 120\text{Pa}$$

◎ **1－18.** 直径 76mm 的轴在同心缝隙为 0.03mm，长度为 150mm 的轴承中旋转，轴的转速为 226r/min，测得轴颈上的摩擦力矩为 76N·m，试确定缝隙中的油液的动力粘度。(如图 1－12)

[答：$\mu = 1.86\text{Pa} \cdot \text{s}$]

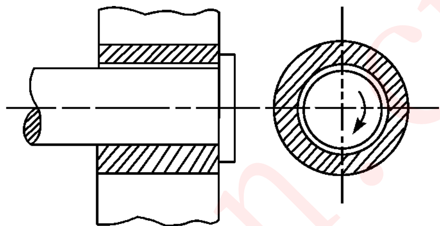


图 1－12

分析 同心环形缝隙中的回转运动受力矩可用课本中(1－42)式计算。

解 由题 $n = 226\text{r/min}$ $w = \frac{\pi n}{30} = 23.67\ \text{rad/s}$

由(1－42)式 $T = \frac{\pi\mu l d^3 w}{4\delta}$

代入数据

$$76 = \frac{\pi\mu \times (150 \times 10^{-3}) \times (76 \times 10^{-3})^3 \times 23.67}{4 \times 0.03 \times 10^{-3}}$$

解得 $\mu = 1.86\text{Pa} \cdot \text{s}$

◎**1－19.** 在直径 $d = 64\text{mm}$，长度 $l = 100\text{mm}$ 的滑动轴承中，充满相对密度 $d = 0.85$ 的 15 号机械油。当油温为 20℃ 时测得轴上扭矩 $T = 2.5\text{N} \cdot \text{m}$，转速 $n = 1200\text{r/min}$，试求轴承的同心缝隙。(如图 1－13)

[答：$\delta = 0.03\text{mm}$]

分析：由上题，同心环形缝隙所受力矩可用课本中公式(1－42)：

$$T = F\frac{d}{2} = \frac{\pi\mu l d^3 w}{4\delta}$$

解 $n = 1200\ \mathrm{r/min}$

$$w = \frac{\pi n}{30} = 125.66\ \mathrm{rad/s}$$

由课本中(1－42)式 $T = \dfrac{\pi \mu l d^3 w}{4\delta}$

查标准手册 $d = 0.85$ 的15号机械油20℃时，$\mu = 0.119\mathrm{Pa \cdot s}$

代入数据

$$2.5 = \frac{\pi \times 0.119 \times (100 \times 10^{-3}) \times (64 \times 10^{-3})^3 \times 125.66}{4\delta}$$

解得 $\delta = 0.03\ \mathrm{mm}$

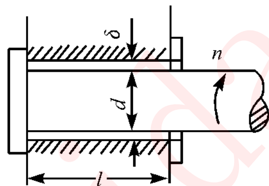


图1－13

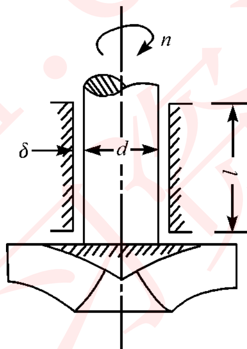


图1－14

◎ **1－20.** 水轮机轴径 $d = 0.36\mathrm{m}$，轴承长 $l = 1\mathrm{m}$，同心缝隙 $\delta = 0.23\mathrm{mm}$，润滑油动力粘度 $\mu = 0.072\mathrm{Pa \cdot s}$，试求水轮机转速 $n = 200\mathrm{r/min}$ 时，消耗于轴承上的摩擦功率。(如图1－14)

[答：$P = 5.03\mathrm{kW}$]

分析 同心环形缝隙克服摩擦的功率计算式由课本中(1－43)式得。

解 $n = 200\ \mathrm{r/min}$ $\quad w = \dfrac{\pi n}{30} = 20.94\ \mathrm{rad/s}$

由课本中公式(1－43) $P = \dfrac{\pi \mu l d^3 w^2}{4\delta}$

代入数据得
$$P = \frac{\pi \times 0.072 \times 1 \times 0.36^3 \times 20.94^2}{4 \times 0.23 \times 10^{-3}}$$

$$= 5.03 \times 10^3\ \mathrm{W} = 5.03\mathrm{kW}$$



◎ **1－21.** 油压机活动部件在自重与轴承摩擦力的作用下匀速下落，已知自重 $W = 190N$，$d = 152mm$，$D = 152.02mm$，$l = 200mm$。

(1) 如果用 $\mu = 0.62Pa \cdot s$ 的油，试求活动部件的下落速度；

(2) 如果下落速度变为 $v_0 = 39mm/s$，试问此时油的动力粘度变为多少？（如图 1－15）

［答：(1) $v_0 = 32mm/s$；
(2) $\mu = 0.51Pa \cdot s$］

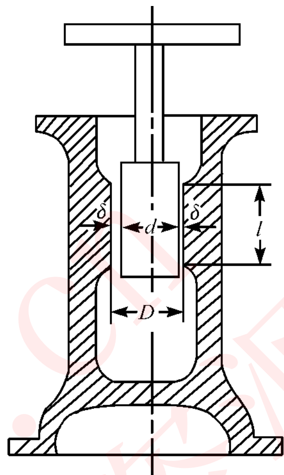


图 1－15

分析　本题为同心环形缝隙中的直线运动，所受摩擦力等于重力。

解　(1) 在下落过程中匀速运动，摩擦力

$F = W = 190N$

由课本中(1－39)式

$$F = \frac{\pi \mu v_0 l d}{\delta} \qquad ①$$

代入已知数据

$$190 = \frac{\pi \times 0.62 \times v_0 \times (200 \times 10^{-3}) \times (152 \times 10^{-3})}{(152.02 - 150) \times 10^{-3}}$$

解得　$v_0 = 32 \times 10^{-3} m/s = 32\ mm/s$

(2) 若得 $v_0 = 39\ mm/s$ 代入 ① 式得

$$190 = \frac{\pi \times \mu \times (39 \times 10^{-3}) \times (200 \times 10^{-3}) \times (152 \times 10^{-3})}{(152.02 - 150) \times 10^{-3}}$$

解得　$\mu = 0.51\ Pa \cdot s$

◎ **1－22.** 四缸发动机曲轴上的三个主轴颈尺寸相同：$l = 120mm$，$d = 60mm$，同心缝隙 $\delta = 0.1mm$，润滑油的动力粘度 $\mu = 0.05Pa \cdot s$，发动机转速 $n = 1800r/min$，试求消耗于轴承摩擦上的功率。（如图 1－16）

［答：$P = 1.085kW$］

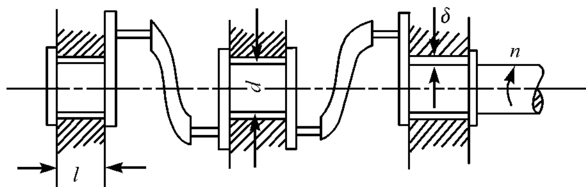


图 1－16

分析　本题同题(1－20)，仍为求同心环形缝隙转动克服摩擦功率问题。

解　$n = 1800\text{r/min}$

$$w = \frac{\pi n}{30} = 188.50 \text{ rad/s}$$

由课本中(1－43)式　$P = \dfrac{\pi \mu l d^3 w^2}{4\delta}$

代入数据得

$$P = \frac{\pi \times 0.05 \times (120 \times 10^{-3}) \times (60 \times 10^{-3})^3 \times 188.50^2}{4 \times 0.1 \times 10^{-3}}$$

$$= 361.67\text{W}$$

$$P_{总} = 3P = 1085.01W = 1.085\text{kW}$$

◎ **1－23.** 利用液体摩擦传递扭矩 T 的摩擦盘直径为 d、间隙为 δ，摩擦盘间液体的动力粘度为 μ，主动轴与从动轴的角速度分别为 ω_1 及 ω_2。$\omega_1 - \omega_2$ 叫作摩擦盘的滑移角速度。

(1) 试求以 T、d、δ、μ 表示的滑移角速度公式；

(2) 如果 $\omega_1 - \omega_2 = 44\text{rad/s}$，$d = 200\text{mm}$，$\delta = 0.13\text{mm}$，$\mu = 0.14\text{Pa}\cdot\text{s}$，试求扭矩 T 为若干？(如图 1－17)

[答：(1)$\omega_1 - \omega_2 = \dfrac{32\delta T}{\pi \mu d^4}$；(2)$T = 7.44\text{N}\cdot\text{m}$]

分析　本题为圆盘缝隙中的回转运动，可参考教材 31 页推导。

解　(1) 令 $w = w_1 - w_2$，表示滑移角速度，圆角速度 $v = wr$

圆盘间速度梯度　$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \dfrac{v}{\delta} = \dfrac{wr}{\delta}$

切应力　$\tau = \dfrac{\mu w r}{\delta}$



在盘间任取宽度为 dr 的圆环形微元表面

$$dA = 2\pi r dr$$

则
$$dF = \tau dA = \frac{2\pi\mu w}{\delta} r^2 dr$$

$$dT = dF \cdot r = \frac{2\pi\mu w}{\delta} r^3 dr$$

对力矩 dT 积分，得总摩擦力矩

$$T = \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{2\pi\mu w}{\delta} r^3 dr = \frac{\pi\mu d^4 w}{32\delta} \quad ①$$

∴
$$w_1 - w_2 = w = \frac{32\delta T}{\pi\mu d^4} \quad ②$$

（2）代入数据值到 ①

得
$$T = \frac{\pi \times 0.14 \times (200 \times 10^{-3})^4 \times 44}{32 \times 0.13 \times 10^{-3}}$$

$$= 7.44\text{N} \cdot \text{m}$$

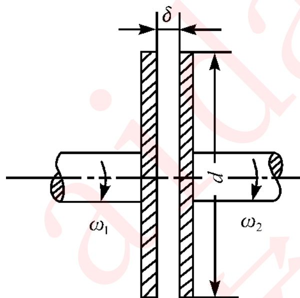


图 1－17

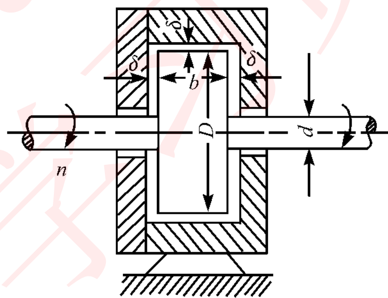


图 1－18

● **1－24.** 液体摩擦测功计的转子直径 $D = 110\text{mm}$，宽度 $b = 40\text{mm}$，转子与壳体之间的轴向缝隙、径向缝隙均充满动力粘度 $\mu = 0.7\text{Pa}\cdot\text{s}$ 的液体，轴的直径 $d = 30\text{mm}$，轴的转速 $n = 420\text{r/min}$，缝隙 $\delta = 0.01\text{mm}$。

试求测功计的扭矩和功率。（如图 1－18）

［答：$T = 217\text{N}\cdot\text{m}$，$P = 9.54\text{kW}$］

分析 本题中既有同心环形缝隙转动，也有圆环缝隙转动，因此所受力矩和功率应为两项之和。其中圆环可认为是两圆



盘之差(相减即可)。

解 对环形缝隙转动力矩 T_1

$$T_1=\frac{\pi\mu bd^3w}{4\delta}$$

其中 $$w=\frac{\pi n}{30}=\frac{420\pi}{30}=43.98\ \mathrm{rad/s}$$

代入数据:

$$T_1=\frac{\pi\times0.7\times(40\times10^{-3})\times(110\times10^{-3})^3\times43.98}{4\times0.01\times10^{-3}}$$
$$=128.73\mathrm{N\cdot m}$$
$$P_1=T_1w=128.73\times43.98$$
$$=5.66\times10^3\ \mathrm{W}$$

对圆环缝隙,可认为是两圆盘所受力矩之差。

对大圆盘 $$T'_2=\frac{\pi\mu D^4w}{32\delta}$$

对小圆盘 $$T''_2=\frac{\pi\mu d^4w}{32\delta}$$

∴ $$T_2=T'_2-T''_2=\frac{\pi\mu w}{32\delta}(D^4-d^4)$$

代入数据 $$T_2=\frac{\pi\times0.7\times43.98}{32\times0.01\times10^{-3}}(110^4-30^4)\times10^{-12}$$
$$=44.0\mathrm{N\cdot m}$$
$$P_2=T_2\cdot w=44.0\times43.98=1.935\times10^3\mathrm{W}$$

∴ $$T_{总}=T_1+2T_2=128.73+2\times44.0$$
$$=217\mathrm{N\cdot m}$$
$$P_{总}=T_{总}w=217\times43.98=9.54\times10^3\mathrm{W}$$
$$=9.54\mathrm{kW}$$

小结 本题难在综合性较强,既有同心环形缝隙转动,也有圆环缝隙转动。

◎ **1－25.** 在旋转锥阀与阀座之间有厚度为 δ、动力粘度为 μ 的一层油膜,锥阀高为 h,上、下底圆半径分别为 r_1 及 r_2。

(1) 试证明,锥阀以 ω 角速度旋转时作用在锥阀上的阻力矩为



$$T=\frac{\pi\mu\omega(r_1^2+r_2^2)(r_1+r_2)\sqrt{(r_1-r_2)^2+h^2}}{2\delta};$$

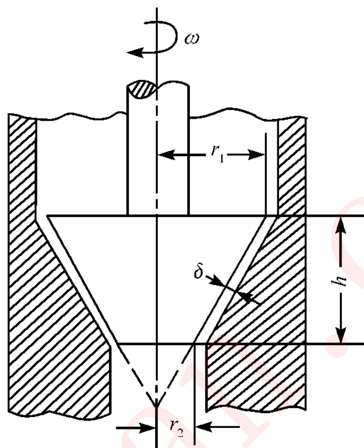


图 1－19

(2) 已知 $T=0.05\text{N}\cdot\text{m}$，$\mu=0.1\text{Pa}\cdot\text{s}$，$r_1=20\text{mm}$，$r_2=10\text{mm}$，$h=20\text{mm}$，$\omega=20\pi\text{rad/s}$，试求缝隙 δ。(如图 1－19)

[答：$\delta=0.066\text{mm}$]

分析　利用得分观点，可把锥形分解为高 dl 的圆环，再积分求得。

解　(1) 在锥环面上取一微段，高为 dh。可认为此段为一同心环形缝隙

利用课本中式(1－42)

$$\mathrm{d}T=\frac{\pi\mu\,\mathrm{d}l(2r)^3w}{4\delta}$$

从 r_2 到 r_1 作定积分

$$T=\int_{r_2}^{r_1}\mathrm{d}T=\int_{r_2}^{r_1}\frac{2\pi\mu w}{\delta}r^3\,\mathrm{d}l$$

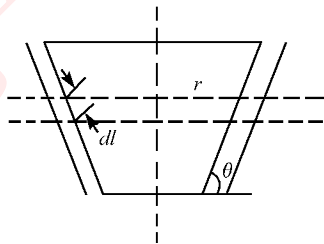


图 1－20

如图 1－20 所示 $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{\cos\theta}$ 即 $\mathrm{d}l=\frac{\mathrm{d}r}{\cos\theta}$

$$\therefore\quad T=\int_{r_2}^{r_1}\frac{2\pi\mu w}{\delta\cos\theta}r^3\,\mathrm{d}r$$



$$= \frac{\pi\mu\omega}{2\delta\cos\theta}(r_1^4 - r_2^4) \quad ①$$

由几何关系
$$\cos\theta = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}} \quad ②$$

将 ② 代入 ①

得
$$T = \frac{\pi\mu\omega}{2\delta}\frac{\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}}{r_1 - r_2}(r_1^4 - r_2^4)$$

$$= \frac{\pi\mu\omega(r_1^2 + r_2^2)(r_1 + r_2)\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}}{2\delta} \quad ③$$

(2) 将数据代入 ③

$$0.05 = \frac{\pi \times 0.1 \times 20 \times [(20 \times 10^{-3})^2 + (10 \times 10^{-3})^2] \times (20 + 10) \times 10^{-3}\sqrt{(20 \times 10^{-3})^2 - (10 \times 10^{-3})^2 + (20 \times 10^{-3})^2}}{2\delta}$$

解得
$$\delta = 0.066\text{mm}$$

第二章

流体静力学

内容提要

一、平衡流体上的作用力

1. 质量力

与流体微团质量大小有关，作用在微团质心上。

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = \mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{a}_m = \mathrm{d}m(f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}) \qquad (2-1)$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m$ 为作用在流体质点上的质量力。

2. 静压强与静压力

当流体处于静止或相对静止状态时，作用在流体上的应力中，切向应力等于零，只有法向应力，即应力处处与其作用面垂直。下面将要阐明流体静压强就是负的法向应力，即

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta \boldsymbol{A}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}} \qquad (2-2)$$

称为一点的流体静压强。

微元表面上的流体静压力矢量的表达式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -p\mathrm{d}A\boldsymbol{n} \qquad (2-3)$$

作用在某个有限表面 A 上的流体静压力的矢量为

$$\boldsymbol{F} = -\int_A p\,\mathrm{d}A\boldsymbol{n} \qquad (2-4)$$

式中　$-\boldsymbol{n}$ 说明流体静压力的方向是沿受压面的内法线方向。

二、流体平衡的微分方程式

1. 流体平衡方程

流体平衡方程又称为欧拉平衡方程

$$\left.\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-5)$$

用向量形式表示为

$$\boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\nabla \boldsymbol{p} = 0 \qquad (2-6)$$

方程表明：在静止流体中，各点单位质量流体所受表面力和质量力相平衡。欧拉平衡微分方程的全微分式为

$$\mathrm{d}p = \rho(f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z) \qquad (2-7)$$

2. 质量力的势函数，等压面

引入某一个坐标函数 $W = W(x、y、z)$

于是便得

$$\mathrm{d}p = -\rho\mathrm{d}W \qquad (2-8)$$

我们称的坐标函数 $W(x、y、z)$ 为质量力的势函数，符合(2—8)式关系的质量力则称为有势的质量力。

等压面是压强相等的空间点构成的面(平面或曲面)，即 $\mathrm{d}p = 0$，则等压面的方程为

$$f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z = \boldsymbol{f}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad (2-9)$$

三、重力场中的平衡流体

1. 重力场中连续、均质、不可压缩流体的静压强基本公式



$$z+\frac{p}{\rho g}=C \qquad (2-10)$$

2. 可压缩流体的静压强分布公式

(1) 对流层

$$p=101.3\left(1-\frac{z}{44\ 300}\right)^{5.256}\text{kPa} \qquad (2-11)$$

式中 z 的单位是 m，$0\leqslant z\leqslant 11\ 000$m。

(2) 同温层

$$p=22.6\exp\left(\frac{11\ 000-z}{6334}\right)\text{kPa} \qquad (2-12)$$

式中的 z 的单位是 m，$11\ 000\leqslant z\leqslant 25\ 000$m。

四、静压强的计算与测量

1. 静压强的计量单位

(1) 应力单位　Pa($1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$)

(2) 液柱高单位　米水柱(mH_2O)，毫米汞柱(mmHg)

(3) 大气压单位　标准大气压(atm)　$1\text{atm}=760\text{mmHg}=1.01325\times10^5\text{Pa}$。

2. 静压强测量

测压管，U 形测压计，差压计，微压计等。

五、平衡流体对壁面的作用力

1. 对于某一空间壁面 A

微元面积上的流体静压力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=p(-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A) \qquad (2-13)$$

整个受压面积 A 上的流体静压力为

$$\boldsymbol{F}=\int_A p(-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A)=\int_A \rho gh(-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A)=\rho g\int_A(-\boldsymbol{n})h\mathrm{d}A \qquad (2-14)$$

2. 压力是从积分式$\int_A\int_Z h\,\mathrm{d}A_z$ 得到的，它是一个纯数学概念。

六、液体的相对平衡

1. 容器作匀加速直线运动

(1) 压强分布

$$p = p_0 + \rho[ay\cos\alpha + z(a\sin\alpha - g)] \quad (2-15)$$

这就是流体静压强在不同点(y,z)上的分布规律。

(2) 等压面方程及等压面斜率

$$a\cos\alpha \mathrm{d}y + (a\sin a - g)\mathrm{d}z = 0 \quad (2-16)$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{a\cos a}{g - a\sin a} = \tan\beta$$

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ 是等压面的斜率，因为 a、g、a 都是常数，故倾斜角 β 是一定值。

2. 容器作等角速回转运动

(1) 压力分布

$$p = \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - zg\right) + C$$

$$= \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - zg\right) + C \quad (2-17)$$

(2) 等压面

$$\left.\begin{aligned} \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - zg &= C \\ \frac{\omega^2 r^2}{2} - zg &= C \end{aligned}\right\} \quad (2-18)$$



典型例题与解题技巧

【例 1】 试求图 2－1 中同高程的两条输水管道的压强差 $p_1 - p_2$，已知液面高程读数 $z_1 = 18\text{mm}$，$z_2 = 62\text{mm}$，$z_3 = 32\text{mm}$，$z_4 = 53\text{mm}$，酒精密度为 800kg/m^3。

解题分析 利用压强定义 $p = \rho g h$ 计算液面压差。



解题过程　设管轴到水银面 4 的高程差为 h_0，水密度为 ρ，酒精密度为 ρ_1，水银密度为 ρ_2，则

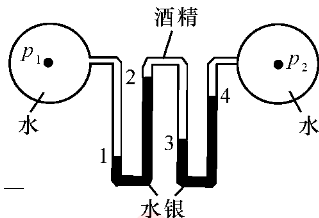


图 2－1

$$p_1 + \rho g(h_0 + z_4 - z_1) - \rho_2 g(z_2 - z_1) + \rho_1 g(z_2 - z_3) - \rho_2 g(z_4 - z_3) = p_2 + \rho g h_0$$

即：$p_1 - p_2 = \rho_2 g(z_2 - z_1 + z_4 - z_3) - \rho_1 g(z_2 - z_3) - \rho g(z_4 - z_1)$

将 z 的单位换成 m，代入数据得

$$p_1 - p_2 = 8093.25\text{Pa}$$

【例 2】 将 U 型测压计的两末端部分的直径扩大成如图 2－2 所示的形式，可以增加其灵敏度。如面积 S_1 为面积 S_2 的 50 倍。一边充水，另一边充比重为 $\delta_0 = 0.95$ 的油。试计算使油水分界面移动 25mm 的压差应是多少？

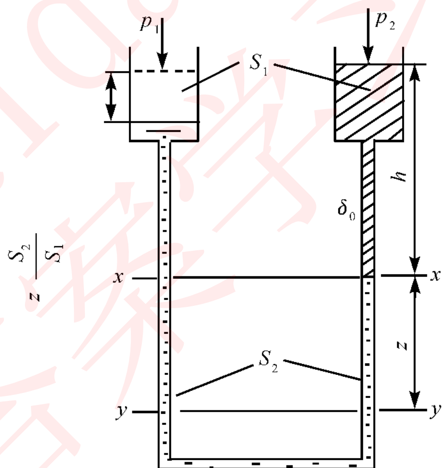


图 2－2

解题分析　根据 $p = \rho g h$ 压力平衡计算。

解题过程　由于水比油重，故水应充满 U 形管的底部。

设当两边的压力相等、即 $p_1 = p_2$ 时，油水分界面处于 $x-x$ 位置。分界面以上的油柱高为 h。对左边的水来说，由于在此面以下均是连通的水，故两边 $x-x$ 面上的压力相等。由此可知左边的水柱高 h_w 应满足下式：

$h_w\delta_w = h\delta_0$

$h_w = h\delta_0/\delta_w$

此处 δ_w 为水的比重。

当 p_2 大于 p_1 时，分界面下移 z 的距离从 $x-x$ 降到 $y-y$，此时右边粗管中的油面将下降 zS_2/S_1，左边粗管中的水面将上升同样的距离。

右管 $y-y$ 面上的压力 p_y 应是：

$$p_y = p_2 + \delta_0\gamma w(h + z + zS_2/S_1),$$

此处 γ_w 为水的重度。

左管 $y-y$ 面上的压力也应是 p_y，并等于：

$$p_y = p_1 + \delta_w\gamma_w[(h\delta_0/\delta_w) + z + (zS_2/S_1)]。$$

由以上二式可得：

$$\begin{aligned}p_2 - p_1 &= \delta_w\gamma_w z(1 + S_2/S_1) - \delta_0\gamma_w z(1 - S_2/S_1)\\ &= \gamma_w z[\delta_w(1 + S_2/S_1) - \delta_0(1 - S_2/S_1)]\\ &= 9.81\times10^3\times0.025[1\times(1+1/50)-0.95(1-1/50)]\\ &= 22\text{N/m}^2.\end{aligned}$$

【例 3】 为了测定运动物体的加速度，在运动物体上装上一直径为 d 的 U 形管，测得管中液面差 $h = 0.05$m，两管的水平距离 $l = 0.3$m，如图 2－3 所示，求加速度 a 的大小。

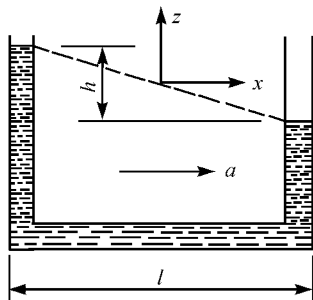


图 2－3

解题分析 利用公式 $a\cos\alpha dy + (a\sin\alpha - g)dz = 0$ 计算液面方程。



解题过程　单位质量力 $f_x = -a, f_y = 0, f_z = -g$

代入平衡微分方程：$dp = \rho(-a dx - g dz)$

等压面方程为　$-a dx - g dz = 0$

得到液面方程为　$z = -\dfrac{a}{g}x$

将 $x = -\dfrac{l}{2}, z = \dfrac{1}{2}h$ 代入，得到

$$a = \frac{gh}{l} = 9.8 \times \frac{0.05}{0.3} = 1.633 \text{m/s}^3$$

【例 4】　如图 2－4 所示的贮水容器，其壁面上有三个半球形的盖。设 $d = 0.5\text{m}, h = 1.5\text{m}, H = 2.5\text{m}$. 试求作用在每个盖上的液体总压力。

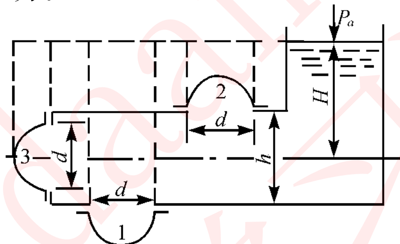


图 2－4

解题分析　本题应用 $\boldsymbol{F} = \int_A p(-\boldsymbol{n} d\boldsymbol{A}) = \int_A \rho g h(-\boldsymbol{n} d\boldsymbol{A}) = \rho g \int_A (-\boldsymbol{n}) h d\boldsymbol{A}$ 对压力可在 $x-y$ 方向上作力的分解。

解题过程　底盖上总压力的水平分力为零。这是因为，作用在盖子左半部与右半部的总压力的水平分力相等，而方向相反。底盖上的总压力等于总压力的垂直分力，可用下式计算：

$$F_{Z_1} = \rho g V_1 = \rho g\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H + \frac{h}{2}\right) + \frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$= 9807\left[\frac{\pi \times 0.5^2}{4}(2.5 + 0.75) + \frac{\pi \times 0.5^3}{12}\right]$$

$$= 6579\text{N}$$

顶盖上部压力的水平分力亦为零,总压力等于总压力的垂直分力:

$$F_{Z_2} = \rho g V_2 = \rho g\left[\frac{\pi d^2}{4}\left(H-\frac{h}{2}\right)-\frac{\pi d^3}{12}\right]$$

$$= 9807\left[\frac{\pi\times 0.5^2}{4}(2.5-0.75)-\frac{\pi\times 0.5^3}{12}\right]$$

$$= 3049\text{N}$$

侧盖上总压力的水平分力为

$$F_{X_3} = \rho g h_c A_x = \rho g H\frac{\pi d^2}{4}$$

$$= 9807\times 2.5\frac{\pi\times 0.5^2}{4} = 4814\text{N}$$

总压力的垂直分力应等于盖之下半部与上半部的压力体之差的水的重力,亦即半球体积之水的重力:

$$F_{Z_3} = \rho g\frac{\pi d^3}{12} = 9807\times\frac{\pi\times 0.5^3}{12} = 321\text{N}$$

故侧盖上总压力的大小与方向为

$$F_p = \sqrt{F_{X_3}^2 + F_{Z_3}^2} = \sqrt{4814^2+321^2} = 4825\text{N}$$

$$tg\theta = \frac{F_{X_3}}{F_{Z_3}} = \frac{4814}{321} = 15$$

$$\theta = 86°11'$$

因为总压力的作用线一定与盖的球面相垂直,故一定通过球心。

 历年考研真题评析

【题1】 (湖南大学2005年)有一2m×2m矩形平板铅垂置于某静止液体中,如图2－5所示。该液体的容重γ沿着深度做直线分布变化,如液面及3m深处的液体容重分别为:$\gamma_0 = 1.00\text{t/m}^3$,$\gamma_3 = 1.18\text{t/m}^3$,试求:(1) 液体压强的计算公式;(2) 作用在平板上的液体总压力;(3) 压力中心距液面的距离。

解题分析 本题中液体密度变化,计算压强及压力都应采用积分法。



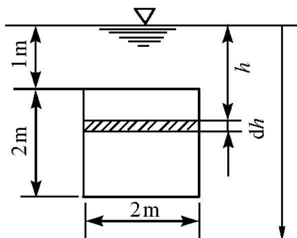


图 2－5

解题过程　(1) 因为 γ 沿水深作直线分布变化

$$p=\int_0^h \gamma \mathrm{d}h=\int_0^h\left(\gamma_0+\frac{\gamma_3-\gamma_0}{3}h\right)\mathrm{d}h$$

$$=\int_0^h\left(1+\frac{1.18-1.0}{3}h\right)\mathrm{d}h$$

$$=h+0.03h^2$$

(2) 作用在平板上的液体总压力

$$P=b\int_1^3 p\mathrm{d}h=2\int_1^3(h+0.03h^2)\mathrm{d}h=83.5\mathrm{kN}$$

(3) 设压力中心距液面距离为 h_c

$$Ph_c=b\int_1^3 ph\,\mathrm{d}h$$

$$h_c=\frac{b}{P}\int_1^3(h+0.03h^2)h\mathrm{d}h=2.18\mathrm{m}$$

【题 2】　(浙江大学 2006 年) 如图 2－6 所示，液体转速计由直径为 d_1 的中心圆筒和重力为 W 的活塞及其联通的两根直径为 d_2 的细管组成，内装水银。细管中心线距圆筒中心轴的距离为 R。转速计的转速变化时，活塞带动指针上、下移动。试推导活塞位移 h 与转速 n 之间的关系式。

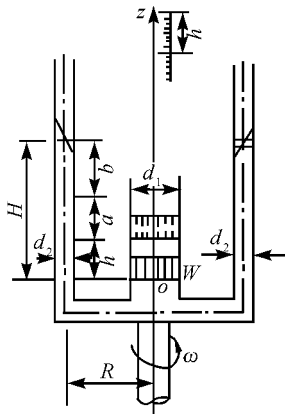


图 2－6

解题分析　本题可先由下列公式计算液面方程液柱高度，即为液面在容

器壁高度。

$$\frac{w^2x^2}{2}+\frac{w^2y^2}{2}-gz=C$$

$$\frac{w^2r^2}{2}-gz=C$$

解题过程 （1）转速计静止不动时，细管与圆筒中的液位差 a 是由于活塞的重力所致，即

$$W=\rho g\ \frac{\pi}{4}d_1^2a$$

$$a=\frac{W}{\rho g\pi d_1^2/4} \qquad ①$$

（2）当转速计以角速度 ω 旋转时，活塞带动指针下降 h，两细管液面上升 b，根据圆筒中下降的体积与两细管中上升的体积相等，得

$$\frac{\pi}{4}d_2^2\times 2b=\frac{\pi}{4}d_1^2h$$

$$b=\frac{d_1^2}{2d_2^2}h \qquad ②$$

（3）取塞底面中心为坐标原点，z 轴向上。根据等角速旋转容器中压强分布公式（2－17），当 $r=R$、$z=H$ 时，$p=0$（计示压强），$C=\rho g[H-\omega^2R^2/(2g)]$，故有

$$p=\rho g\left[\frac{\omega^2(r^2-R^2)}{2g}+H-z\right]$$

这时，活塞的重力应与水银作用在活塞底面上的压强的合力相等，故有

$$W=\int_0^{\frac{d_1}{2}}p\times 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\rho g\int_0^{\frac{d_1}{2}}\left[\frac{\omega^2}{2g}(r^2-R^2)+H\right]r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi d_1^2}{4}\rho g\left[\frac{w^2}{2g}\left(\frac{d_1^2}{8}-R^2\right)+H\right]$$



或
$$\frac{W}{\frac{\pi}{4}d_1^2\rho g}=\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{d_1^2}{8}-R^2\right)+H$$
$$=\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{d_1^2}{8}-R^2\right)+a+b+h$$

将式①、式②代入上式，得

$$h=\frac{1}{2g}\frac{R^2-d_1^2/8}{1+d_1^2/(2d_2^2)}\omega^2$$

而 $\omega=2\pi n/60$，故有

$$n=\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2gh[1+d_1^2/(2d_2^2)]}{R^2-d_1^2/8}}$$

课后习题全解

○**2－1.** 已知海水的相对密度为1.025，$p_{atm}=101300$Pa。试求下列各深度处的海水计示压强和绝对压强。

表2－1

海水深度(单位:m)	10	100	1000	10000
计示压强(单位:Pa)				
绝对压强(单位:Pa)				

解　对海水重力产生的压强 $P=\rho gh$

表2－2

海水深度(单位,m)	10	100	1000	10000
计示压强(单位,Pa)	1.0055×10^5	1.0055×10^6	1.0055×10^7	1.0055×10^8
绝对压强(单位,Pa)	2.0185×10^5	1.1068×10^6	1.0156×10^7	1.0065×10^8

◎**2－2.** 在汽油箱上装三种测压仪表如图所示，已知 $a=0.6$m，$b=1.3$m，各液面标高均以m计。汽油相对密度为0.7，汞相对密度为13.6，空气相对密度近似为零。试求金属压强表上的读数及测压管高度 H。(如图2－7)

[答：$p_M=313$kPa，$H=47.5$m]

分析　对同一压强，各种测压仪表的值相等，只需计算蛇形管压强值即可。

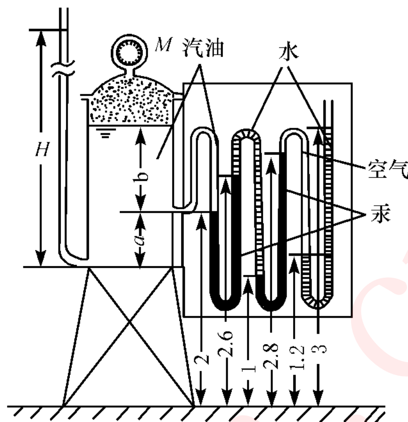


图 2—7

解 从右到左分别计算每个液面交界处的压强值(表压)

空气—水：$p_1=(3-1.2)\text{mH}_2\text{O}=1.8\text{mH}_2\text{O}$

汞—空气：$p_2=p_1=1.8\text{mH}_2\text{O}$

水—汞：$p_3=(2.8-1)\text{mHg}+p_2=1.8\text{mHg}+1.8\text{mH}_2\text{O}$

汞—水：$p_4=p_3-(2.6-1)\text{mH}_2\text{O}=1.8\text{mHg}+0.2\text{mH}_2\text{O}$

汽油—汞：$p_5=p_4+(2.6-2)\text{mHg}=2.4\text{mHg}+0.2\text{mH}_2\text{O}$

金属表：$p_M=p_5-1.3\text{moil}=2.4\text{mHg}+0.2\text{mH}_2\text{O}-1.3\text{moil}$

代入汽油和汞的相对密度

$$p_M=(2.4\times13.6+0.2-1.3\times0.7)\text{mH}_2\text{O}$$

$$=31.93\text{mH}_2\text{O}=313\text{kPa} \qquad ①$$

同理，从左到右分析

$$p_M=(H-a-b)\text{moil}=(H-1.9)\times0.7\text{mH}_2\text{O} \qquad ②$$

由①②得 $(H-1.9)\times0.7=31.93$

$$H=47.5\text{m}$$

◎**2—3.** 汽化器喉部真空度用汞 U 型计测得 $h=70\text{mmHg}$，如果空气温度为 15℃，外界为 1 个标准大气压，试求汽化器喉部空气的绝对压强及密度。(如图 2—8)

[答：$p=91.8\text{kPa}$，$\rho=1.11\text{kg/m}^3$]

分析 由静力平衡可计算喉部的压强，再由气体状态方程计算气



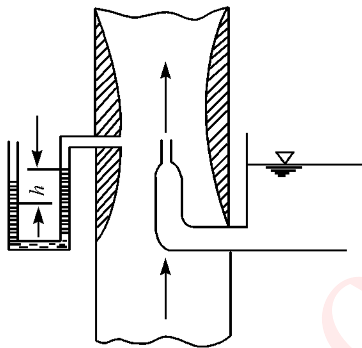


图 2—8

体参数。

解 (1)喉部绝对压强

$$p=p_0-p_h=1\text{atm}-70\text{mmHg}$$
$$=1.01\times10^5-0.07\times9.8\times13.6\times10^3$$
$$=690\text{mmHg}=91.8\text{kPa}$$

(2)由理想气体状态方程 $\frac{p}{\rho T}=R_g$

查课本中表 1—3，空气 $R_g=287\text{J/kg}\cdot\text{K}$

$$T=273+1.5=288\text{K}$$

代入方程 $$\frac{91.8\times10^3}{\rho\times288}=287$$

解出 $$\rho=1.11\text{kg/m}^3$$

◎**2—4.** 用初始汞液面如(a)图所示的三个U型汞测压计装在同一个水箱底部，三个测压计顶边依次低下的距离为 $a=1\text{m}$，汞相对密度为13.6，试求三个U型测压计中的读数 h_1、h_2 及 h_3 各为多少？(如图 2—9)

[答：$h_1=0.1145a$，$h_2=0.1908a$、$h_3=0.2672a$]

分析 由静力学平衡求解分析U形管左端液面交界处。

解 对U型测压计汞—水液面交界作静力学平衡，易得 $P_水=P_汞$

对第一个U形测压计

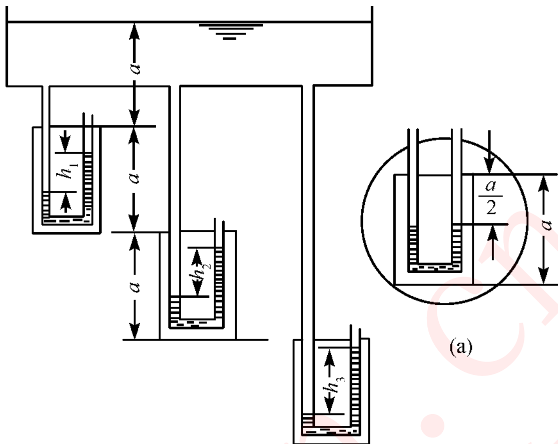


图 2—9

水柱高 $$H_1=a+\frac{a}{2}+\frac{h_1}{2}$$

即有 $\left(a+\frac{a}{2}+\frac{h_1}{2}\right)mH_2O=h_1\,mHg$

$$1.5a+\frac{h_1}{2}=13.6h_1$$

解得 $h_1=0.1145a=0.1145m$

同理有 $\left(a+a+\frac{a}{2}+\frac{h_2}{2}\right)mH_2O=h_2\,mHg$

$$2.5a+\frac{h_2}{2}=13.6h_2$$

解得 $$h_2=0.1908a=0.1908m$$

$$\left(a+a+a+\frac{a}{2}+\frac{h_3}{2}\right)mH_2O=h_3\,mHg$$

$$3.5a+\frac{h_3}{2}=13.6h_3$$

解得 $$h_3=0.2672a=0.2672m$$

◎**2—5.** 潜艇内的汞气压计读数 $h_1=800mm$，多管汞差压计读数 $h_2=500mm$，海平面上汞气压计读数为 760mm，海水密度为



1025kg/m^3，试求潜艇在海面下的深度 H。（如图 2－10）

［答：$H=13.8$m］

分析　本题仍是静力学分析，根据静力学公式求解。

解　通过潜艇内汞气压计求艇内气压

$$p=h_1\text{Hg}=800\text{mmHg}$$

通过多管汞求艇内气压

$$p=p_a+p_H-p_{H_2}-p_{H_2} \quad ①$$

由题已知：$p_a=760$mmHg　　$p_{H_2}=500$mmHg

代入①得　　$800=760+p_H-500-500$

$$p_H=1040\text{mmHg}=14.144\text{mH}_2\text{O}$$

海水的比密度 $d=\dfrac{\rho}{1000}=\dfrac{1025}{1000}=1.025$

∴　　$$H=\frac{14.144}{1.025}=13.8\text{m}$$

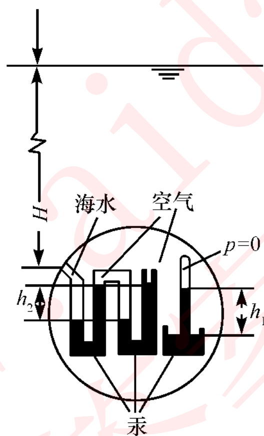


图 2－10

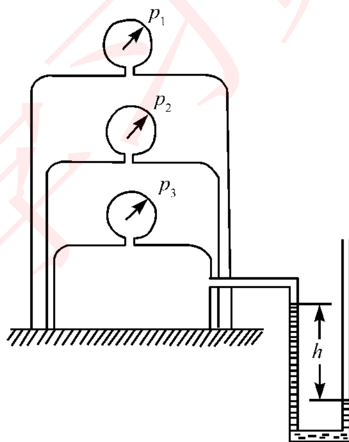


图 2－11

◎**2－6.** 三重密封容器上都装有真空表，它们的读数均相同，$p_1=p_2=p_3=20$kPa（真空度），试求图示 U 型汞测压计上的高度 h 及最里边的容器中的气体压强 p。（如图 2－11）

［答：$h=449$mmHg，$p=41360$Pa（真空度）］

分析 利用真空表先计算最里边容器气压，真空度表示负压。

解 最里边容器气压 $p=p_a+p_1+p_2+p_3$

$$p_a=1.0136\times10^5\text{Pa}$$

$$p_1=p_2=p_3=-20\text{kPa}$$

∴ $$p=1.0136\times10^5-3\times20\times10^3=41360\text{Pa}$$

由 U 型汞测压计表示

$$p=p_a-p_h$$

即 $$p_\text{h}=p_a-p=60\text{kPa}=449\text{mmHg}$$

∴ $$h=449\text{mm}$$

●2—7. 灭火器内装有液体，从汞差压计上读得 $h_1=26.5\text{mm}$，$h_2=40\text{mm}$，$a=100\text{mm}$，试求灭火器中液体的密度 ρ 及装液高度 H。(如图 2—12)

[答：$\rho=1619\text{kg/m}^3$，$H=296\text{mm}$]

分析 可选择液体和汞的交界面作静力学分析。

解 设灭火器上部压力为 p_0

对 1 管液面交界压强 $p_1=p_0+p_{h_1}=p_0+p_{H_1}$

即 $p_{h_1}=p_{H_1}$

同理分析 2 管　有 $p_{h_2}=p_{H_2}$

由几何图形

$$H_1=(H-a)+h_1$$

$$H_2=H$$

∴ $$\rho g(H-a+h_1)=\rho_{汞}\ gh_1$$

$$\rho gH=(\rho_{汞}-\rho)gh_2$$

代入数据 $$\begin{cases}\rho(H-100+26.5)=\rho_{汞}\times26.5\\ \rho H=(\rho_{汞}-\rho)gh_2\end{cases}$$

$$\rho_{汞}=13.6\times10^3\text{kg/m}^3$$

解得 $$\rho=1619\text{kg/m}^3$$

$$H=296\text{mm}$$

小结 本题重在分析清几个压强之间的关系。



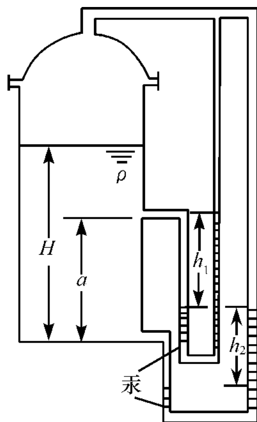


图 2—12

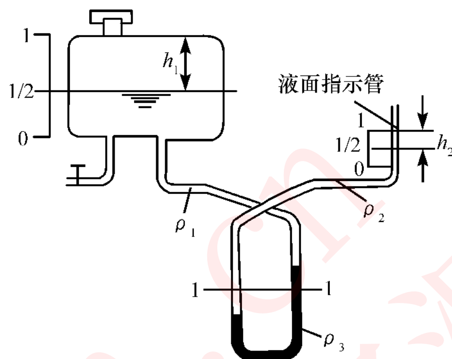


图 2—13

◎**2—8.** 油箱液面指示器的功用是：在较短尺寸的液面指示管上成比例地指出油箱中液面的下降情况。在图示的三液交叉式 U 型管中，装有汽油 ρ_1、汞 ρ_3 和水 ρ_2，汽油装满时，U 型管中的汞面为 1—1，液面指示管中的水位在刻度 1 处。当油箱液面下降 h_1 时，指示管中液面下降 h_2，试导出 h_2 与 h_1 的比例关系式。(如图 2—13)

[答：$h_2=\dfrac{\rho_1}{2\rho_3-\rho_1}h_1$]

分析　选择水—汞交界面作静力学分析。

解　当液面下降时，水—汞交界面的压强 $p_{总}$ 保持不变，$p=p_{H_2}$

$p=p_{H_1}+p_{H_3}$

其中 p_{H_1}、p_{H_2}、p_{H_3} 分别表示油、水和汞液柱产生的压强

$p_{H_1}=0$

油液面下降 h_1 时，水液面下降 h_2

$$p_{H_2}^1=p_{H_2}=2\rho_2 gh_2$$

$$p_{H_1}^1=p_{H_1}-(h_1+h_2)\text{oil}=p_{H_1}-\rho_1 g(h_1+h_2)$$

$$p_{H_3}^1=2\rho_3 gh_2$$

由此得　$2\rho_3 gh_2=\rho_1 g(h_1+h_2)$　　　$h_2=\dfrac{\rho_1}{2\rho_3-\rho_1}h_1$

◎**2—9.** 试根据国际标准大气的规定求出下列三种情况下的海拔高度：

(1)摄氏温度为 0℃,(2)绝对压强为 100kPa,(3)绝对压强为98.1 kPa。

[答:(1)$z=2.3$km,(2)$z=109$m,(3)$z=270$m]

分析 利用国际标准大气规定计算,教材 $P_{63}\sim P_{65}$。因为 $T>56.5$℃ $p>22.6$kPa 故在对流层。

解 (1)海拔 z 处温度 $T=T_a-\beta z$

其中 $T_a=288\text{K}$ $\beta=0.0065\text{K/m}$

将 $T=0℃=273\text{K}$ 代入得 $z=2.3\text{km}$

(2)对流层中压强公式 $p=p_a(1-\frac{\beta z}{T_a})\frac{g}{R_g\beta}$

代入数据$P=100\ 000\text{Pa}$ $p_a=101325\text{Pa}$ $\beta=0.0065\text{K/m}$

$T_a=273\text{K}$ $R_g=287\text{J/kg}\cdot\text{K}$ $g=9.81\text{m/s}^2$

$$100000=101325(1-\frac{0.0065z}{273})\frac{9.81}{287\times0.0065}$$

解得 $z=109\text{m}$

(3)同理,如②求解,将 $p=98.1\times10^3\text{Pa}$ 代入方程

解得 $z=270\text{m}$

◎**2—10.** 试根据国际标准大气的规定求出下列各海拔高度处空气的绝对压强、温度和密度。

表 2—3

海拔高度 z/km	0	1	10	11	15	25
绝对压强 p/Pa						
温度 t/℃						
密度 ρ/(kg/m^3)						

[答:p:101 300　89 844　26 400　22 600　12 018　2 480

t:　15　8.5　−50　−56.5　−56.5　−56.5

ρ:　1.226　1.112　0.412 5　0.3637　0.1934　0.04]

分析 当 z<11km 时为对流层,当 z>11km 时,为等温层。

解 对流层计算公式:见课本中(2—26)(2—29)(2—30)

同温层计算公式:见课本中(2—31)(2—32)



同温层温度 $T=-56.5℃$。密度计算采用状态方程 $\frac{p}{\rho T}=R_g$

得 $\rho=\frac{p}{R_g T}$

将数据代入计算得：

表 2—4

z	0	1	10	11	15	25
p	101300	89844	26400	22600	12018	2480
t	15	8.5	−50	−56.5	−56.5	−56.5
ρ	1.226	1.112	0.4125	0.3637	0.1934	0.04

◎**2—11.** 已知海平面处 $p_a=101.3\text{kPa}$，$T_a=288\text{K}$，试问在多少海拔高度处它们的数值能各自减小 1%？

[答：$z=84.6\text{m}$ 处 p_a 减小 1%，$z=443\text{m}$ 处 T_a 减小 1%]

分析　温度压力减小 1%，仍在对流层，用对流层公式计算。

解　①压强减少 1%　则 $\frac{p}{p_a}=1-1\%=0.99$

代入课本中公式(2—29)得　$0.99=(1-\frac{\beta z}{T_a})^{\frac{g}{R_g\beta}}$

将常数 β、T_a、R_g、g 代入得

$$0.99=(1-\frac{0.0065z}{288})^{\frac{9.81}{287\times0.0065}}$$

解出　$z=84.6\text{m}$

②温度减小 1%

则 $T=T_a-1\%T_a$　得

代入课本中公式(2—26)　$T=T_a-\beta z$ 得

$$0.01T_a=\beta z$$

$$T_a=288k\qquad \beta=0.0065\text{K/m}$$

解得　$z=443\text{m}$

○**2—12.** 已知海平面处 $p_a=101.3\text{kPa}$，$T_a=288\text{K}$，$\rho_a=1.226\text{kg/m}^3$，$g=9.81\text{m/s}^2$，气体常数 $R_g=288\text{J/kg}\cdot\text{K}$，试按下列四种假设求出海拔 1 km 处的绝对压强（取五位有效数字）。

(1)国际标准大气($\beta=0.0065$ K/m);

(2)大气视为等温状态($T=288$ K);

(3)大气视为绝热状态(绝热指数 $\gamma=1.4$);

(4)大气视为不可压缩流体($\rho=1.226\ \mathrm{kg/m^3}$)

[答:(1)89 844Pa;(2)89 963 Pa;(3)89 774Pa;(4)89 273Pa]

解 (1)利用课本中公式(2-29)

$$p=p_a\left(1-\frac{\beta z}{T_a}\right)^{\frac{g}{R_g\beta}}$$

将数据代入:$z=1$km

$$p=101.3\times10^3\left(1-\frac{0.0065\times10^3}{288}\right)^{\frac{9.81}{287\times0.0065}}=89844\mathrm{Pa}$$

(2)大气视为等温状态,则

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{g\mathrm{d}z}{R_gT_a}$$

积分得
$$p=p_a\exp\left(-\frac{gz}{K_gT_a}\right)$$

即
$$p=101.3\times10^3\exp\left(-\frac{9.81\times10^3}{287\times288}\right)=89963\mathrm{Pa}$$

(3)视为绝热

则
$$\frac{p}{\rho^\gamma}=C \qquad 其中\ C=\frac{p_a}{\rho_a^\gamma}$$

$$\mathrm{d}p=\rho g\mathrm{d}z$$

整理
$$\frac{\mathrm{d}p}{p^{\frac{1}{\gamma}}}=\frac{g}{C^{\frac{1}{\gamma}}}\mathrm{d}z=\frac{g\rho_a}{p_a^{\frac{1}{\gamma}}}\mathrm{d}z$$

积分
$$-\frac{\gamma}{1+\gamma}\left(p^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}}-p_a^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}}\right)=\frac{gp_a}{p_a^{\frac{1}{\gamma}}}z$$

已知 $\gamma=1.4$ $p_a=101.3\mathrm{kPa}$ $\rho_a=1.226\mathrm{kg/m^3}$

解得
$$p=89774\mathrm{Pa}$$

(4)视为不可压缩液体

$$\mathrm{d}\rho=\rho g\mathrm{d}z$$

积分
$$p_a-p=\rho gz$$



$$p=101.3\times10^3-1.226\times9.81\times10^3=89273\text{Pa}$$

◎**2－13.** 已知标准大气压 1atm＝101 300Pa，水的相对密度 $d_{H_2O}=1$，汞的相对密度 $d_{Hg}=13.6$，油的相对密度 $d_{oil}=0.8$，空气的相对密度 $d_{air}=1.226\times10^{-3}$，试进行压强的换算，填写表中空白栏目(1)～(25)中的数值。

[答：(1)199 400；(2)101 300；(3)303 900；(4)91 300；(5)301 300；(6)819 780；(7)91 300；(8)91 490；(9)88 000；(10)101 400；(11)100 097；(12)120；(13)98 100；(14)0.012 9；(15)0.968；(16)10；(17)4.936×10^{-6}；(18)8.87；(19)0.974；(20)0.32；(21)0；(22)0.936；(23)9；(24)0.484；(25)0.050 6]

分析　利用静力学计算公式 $p=\rho gh$ 或书中表 2－1 换算关系表。

计示压强＝绝对压强－大气压

真空度＝大气压－绝对压强

表 2－5

已知		求绝对压强(Pa)		已知		求计示压强(atm)	
计示压强	$10mH_2O$	1		计示压强	9.81mmHg	14	
	0	2			0.981 bar	15	
	2atm	3		真空度	−10 atm	16	
	-10^4 Pa	4			−0.5Pa	17	
	2bar	5		绝对压强	10^6 Pa	18	
	10moil	6			2 bar	19	
真空度	0.1bar	7			1 mHg	20	
	$1mH_2O$	8			1.013bar	21	
	100mmHg	9			$20mH_2O$	22	
	−100Pa	10			7.6mHg	23	
	100m air	11		已知			
绝对压强	10m air	12		绝对压强	$5mH_2O$	24	
	0.981 bar	13			8km air	25	



解 $\rho_{H_2O}=1000kg/m^3$ 由公式 $\rho=\rho_{H_2O}\cdot d$

得 $\rho_{Hg}=13.6\times10^3 kg/m^3$ $\rho_{oil}=0.8\times10^3 kg/m^3$

$\rho_{air}=1.226kg/m^3$

(1) $p_1=p_0+\rho_{H_2O}gh=101300+1000\times9.81\times10$

$=199400Pa$

按此原理计算得 $p_2\sim p_{25}$ 分别为

(2)101300 (3)303900 (4)91300 (5)301300 (6)819780

(7)91300 (8)91490 (9)88000 (10)101400 (11)100097

(12)120 (13)98100 (14)0 .0129 (15)0.968 (16)10

(17)4.736×10^{-6} (18)8.87 (19)0.974 (20)0.32 (21)0

(22)0.936 (23)9 (24)0.484 (25)0.0506

◎2—14. 用图(a)所示倾斜酒精微压计测量气体的微小压强。

(1)设用目力观测标线的准确度为 0.5mm，为使测量 $p=(100\sim200)$mm 水柱的压强时，测量误差不超过±0.2%，试确定斜管与水平面间的夹角 α。

(2)如果用图(b)的单管汞测压计测量同样压强，其最大测量误差是多少？

酒精的相对密度为 0.8，汞相对密度为 13.6，杯中液面可以认为不变。(如图 2—14)

[答:$\alpha\leqslant30°$,6.8%]

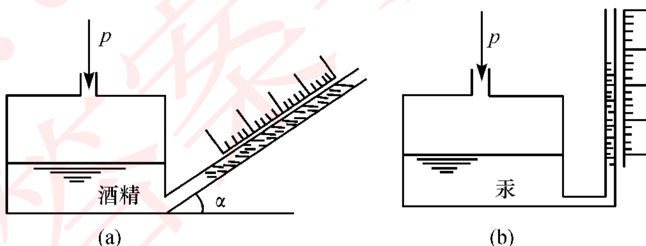


图 2—14

分析 对斜管式微压计 $p-p_a=\rho gl\sin\alpha$ ①

解 (1)由①式得 $\Delta p=\rho g\sin\alpha\Delta l$

标线观测准确度 $\Delta l=0.5mm$



而要求 $\Delta p \leqslant 0.2\% \times 100 = 0.2\mathrm{mmH_2O}$

解得
$$\rho_{酒} g\sin\alpha \times 0.5 \leqslant 0.2 \times \rho_{水} g$$
$$\rho_{酒} = d_{酒} \rho_{水}$$

解得
$$\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\alpha \leqslant 30^\circ$$

(2)用单管汞测压计，$p - p_a = \rho_{汞} gh$
$$\Delta p = \rho_{汞} g\Delta h$$

当 $\Delta h = 0.5\mathrm{mm}$ 时

$\Delta p = 0.5\mathrm{mmHg} = 0.5 \times 13.6\ \mathrm{mmH_2O} = 6.8\mathrm{mmH_2O}$

最大测量误差 $= \dfrac{\Delta p}{p_{\min}} = \dfrac{6.8}{100} = 6.8\%$

◎**2－15.** 气体微压计由两个同心套筒组成，两筒上部隔绝并分别引入气体压强 p_1 与 p_2，两筒下部有小孔连通，下部装有汞，内筒上部装入适量酒精(相对密度为 0.79)，使气体压强差 $\Delta p = p_1 - p_2 = 0$ 时，酒精液面在小管中标尺 $h=0$ 处。(如图 2－15)

(1)试求使小管液面每下降 1 mm 的压强差 Δp 是多少？

(2)如果小管最大刻度是 300mm，则能测量的最大压强差 $\Delta p_{\max}$ 是多少？已知 $d_1 = 10\mathrm{mm}$，$d_2 = 30\mathrm{mm}$，$d_3 = 32\mathrm{mm}$，$d_4 = 40\mathrm{mm}$。

[答：(1) $\Delta p = 44.88\mathrm{Pa}$，(2) $\Delta p_{\max} = 13.64\ \mathrm{kPa}$]

分析　当小管液面下降时，外筒汞液面会上升，按静力学公式计算压差上升、下降的液体满足体积守恒。

解　(1)小管截面积　$A_1 = \dfrac{1}{4}\pi d_1^2$

外筒截面积　$A_2 = \dfrac{1}{4}\pi (d_4^2 - d_3^2)$

内筒截面积　$A_3 = \dfrac{1}{4}\pi d_2^2$

当小管下降 h_1 时由体积守恒 $A_1 h_1 = A_2 h_2 = A_3 h_3$

外筒液面上升　$h_2 = \dfrac{A_1}{A_2} h_1$

内筒液面下降　$h_3=\dfrac{A_1}{A_3}h_1$

$$\Delta p=p_1-p_2=(h_2+h_3)\rho_{汞}\ g-(h_3-h_1)\rho_{酒}\ g \qquad ①$$

$$h_2=\frac{d_1^2}{d_4^2-d_3^2}h_1=0.1736h_1$$

$$h_3=\frac{d_1^2}{d_2^2}=\frac{1}{9}h_1=0.1111h_1$$

当 $h_1=1\text{mm}$ 时

$\Delta p=0.2847\text{mmHg}+0.8889\text{mm}$ 酒精

$=0.2847\times10^{-3}\times13.6\times10^3\times9.81+0.8889\times10^{-3}\times0.79\times10^3\times9.81$

$=44.88\text{Pa}$

(2)当 $h_1=h_{max}=300\text{mm}$　　代入①式

同(1)计算过程,可得

$$\Delta p_{max}=13.64\text{kPa}$$

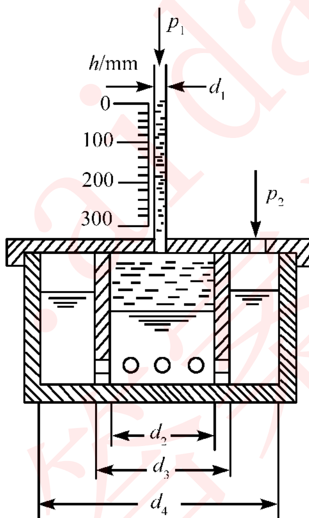


图 2—15

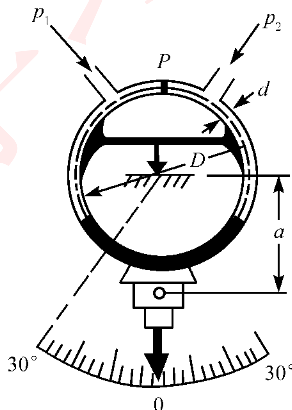


图 2—16

◎2—16. 如图 2—16 所示的环型差压计是用来测量气体微小压强差的一种仪器,直径为 d 的圆管弯成平均直径为 D 的圆环形状,



顶部 P 用隔板隔开，下部充入适量汞，圆环用刃口支承在环中心上，下部连接有配重和指针，当压强差 $\Delta p=p_1-p_2=0$ 时，指针指零。当 $\Delta p>0$ 时，环中汞被压向右边，而圆环与配重指针则顺时针偏转一定角 θ 以保持仪器的平衡。已知 $D=50$ mm，$d=6$ mm，配重重心的半径 $a=60$ mm，要求当 $\Delta p=30$ kPa 时，偏转角 $\theta=30°$，试计算配重应选取的质量是多少？

[答：$m=0.072$ kg]

分析　仪器保持平衡则汞柱产生力矩与配重产生力矩相等，汞柱产生力与压差产生力相等。

解　求压差产生力矩(转矩)

$$T_1=F\cdot\frac{D}{2}=\Delta p\cdot A\cdot\frac{D}{2}=\Delta p\cdot\frac{1}{4}\pi d_1^2\cdot\frac{D}{2}$$

配重产生力矩　$T_2=G\cdot a\cdot \mathrm{tg}\theta=mga\mathrm{tg}\theta$

由 $T_1=T_2$ 得　$\Delta p\cdot\frac{1}{4}\pi d^2\cdot\frac{D}{2}=mga\mathrm{tg}\theta$

代入数据值　$30\times10^3\times\frac{1}{4}\pi(6\times10^{-3})^2\times\frac{1}{2}\times50\times10^{-3}$

$$=m\times9.81\times60\times10^{-3}\times\mathrm{tg}30°$$

解出　$m=0.072\mathrm{kg}$

◎**2—17.** 薄壁钟形容器的直径 $D=0.5$ m、高 $H=0.7$m，质量 $m=101.94$ kg，在自重作用下铅直沉入水中，保持平衡，原来钟罩内的大气按等温规律被压缩在钟罩内部，如图(a)所示。已知大气压强 $p_a=10^5$ Pa。

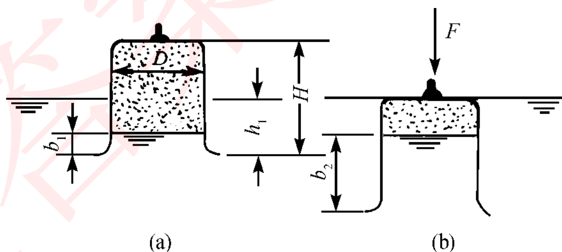


图 2—17

(1)试求钟的淹没深度 h_1 及钟内充水深度 b_1;

(2)需加多大的力 F 才能使钟罩完全没入水中,如图(b)所示,此时钟置内的气体绝对压强及钟罩内的充水深度是多少?(如图2—17)

[答:(1)$h_1=55.4\text{cm}, b_1=3.4\text{cm}$

(2)$F=256.6\text{N}, p=106.4\text{kPa}, b_2=4.2\text{cm}$]

分析 容器内压强可用静力学分析求得,容器内气体满足状态方程。

解 (1)作静力学平衡

容器内压力:$p=p_a+\rho g(h_1-b_1)$ ①

$pA=p_aA+G$ ②

气体状态方程:$pV=p_aV_0$

即 $pA(H-b_1)=p_aAH$ ③

其中:$A=\frac{1}{4}\pi d^2 H=\frac{1}{4}\pi\times0.5^2\times0.7=0.1374\text{m}^3$

$G=mg=101.94\times9.81=1000\text{N}$

代入数据,由①②③解得 $b_1=0.034\text{m}=3.4\text{cm}$

$h_1=0.554\text{m}=55.4\text{cm}$

(2)分析同(1)

静力学平衡:$p=p_a+\rho g(H-b_2)$ ④

$pA=p_aA+G+F$ ⑤

气体状态方程:$pV=p_aV_0$

即 $pA(H-b_2)=p_aAH$ ⑥

代入数据,由④⑤⑥解得

$F=256.6\text{N}$

$p=1.064\times10^5\text{Pa}$

$b_2=0.042\text{m}=4.2\text{cm}$

◎**2—18.** 为了测量高度差为 z 的两个水管中的微小压强差 p_B-p_A,用顶部充有较水轻而与水不相混合的液体的倒U形管。

(1)已知 A、B 管中的液体相对密度 $d_1=d_3=1$,倒U形管中液体相对密度 $d_2=0.95$,$h_1=h_2=0.3\text{m}$,$h_3=1\text{ m}$,试求压强差 p_B-p_A。



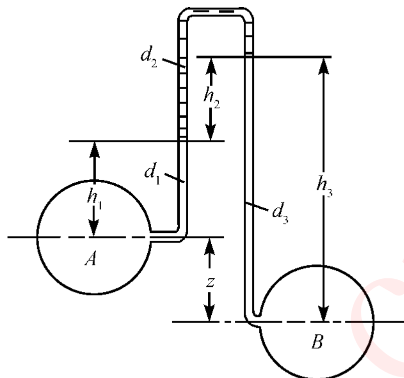


图 2—18

(2)仪器不变，工作液体不变，但两管道中的压强差 $p_B - p_A =$ 3 825.9Pa。试求此时液柱高度 h_1、h_2、h_3 及 z。

(3)求使倒 U 形管中液面成水平，即 $h_2 = 0$ 时的压强差 $p_B - p_A$。

(4)如果换成 $d_2 = 0.6$ 的工作液体，试求使 $p_B - p_A = 0$ 时的 h_1、h_2 及 h_3。(如图 2—18)

[答:(1) $p_B - p_A = 4\ 071\text{Pa}$

(2) $h_1 = 0.55\text{m}, h_2 = -0.2\text{m}, h_3 = 0.75\text{m}, z = 0.4\text{m}$

(3) $p_B - p_A = 3\ 924\text{Pa}$

(4) $h_1 = 0.95\text{m}, h_2 = -1\text{m}, h_3 = 0.35\text{m}$]

分析　对管作静力学平衡分析，$p_B = p_A - \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3$。

解　(1)
$$
\begin{aligned}
p_B - p_A &= \rho_3 g h_3 - \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2 \\
&= \rho_{H_2O} d_3 g h_3 - \rho_{H_2O} d_1 g h_1 - \rho_{H_2O} d_2 g h_2 \qquad ① \\
&= 1000 \times 9.81 \times 1 - 1000 \times 9.81 \times 0.3 - 1000 \times 0.95 \times 9.81 \times 0.3 \\
&= 4071\text{Pa}
\end{aligned}
$$

(2)由①中几何条件　$z = 1\text{m} - 0.3\text{m} - 0.3\text{m} = 0.4\text{m}$

$$h_1 + h_2 = h_3 - z \qquad ②$$

力平静：$p_B - p_A = \rho_3 g h_3 - \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2$

即
$$\frac{p_B - p_A}{\rho_{H_2O}} = d_3 h_3 - d_1 h_1 - d_2 h_2 \qquad ③$$

同时必须满足管长不变

$$h_1 + h_3 = 0.3 + 1 = 1.3 \quad ④$$

由②③④联合解方程

已知：$p_B - p_A = 3825.9\text{Pa}$　$\rho_{H_2O} = 1000\text{kg/m}^3$

$d_1 = d_3 = 1$　$d_2 = 0.95$

解得

$$h_1 = 0.55\text{m}$$
$$h_2 = -0.2\text{m}$$
$$h_3 = 0.75\text{m}$$

(3)当 $h_2 = 0$ 时，由方程②④可解得 $h_1 = 0.45\text{m}$　$h_3 = 0.85\text{m}$

代入方程③求得

$$p_B - p_A = 3924\text{Pa}$$

(4)同(2)将已各条件中 $p_B - p_A = 0, d_2 = 0.6$

解②③④方程组

得

$$h_1 = 0.95\text{m}$$
$$h_2 = -1\text{m}$$
$$h_3 = 0.35\text{m}$$

◎**2—19.** 液力倍压器中活动柱塞的外径 $D_1 = 40\text{mm}$，内径 $D_2 = 20\text{mm}$，已知 $p_1 = 10^6\text{Pa}$，试求由倍压器输出的液体压强 p_2。(如图 2—19)

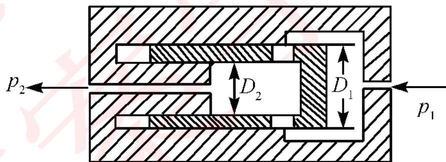


图 2—19

[答：$p_2 = 3\ 000\text{kPa}$]

分析　对活动柱塞在水平方向上作力平衡分析。

解　活塞水平方向受到左右压力

$$p_1 A_1 = p_2 A_2$$

即 $\frac{1}{4}\pi[D_1^2 - D_2^2]p_1 = \frac{1}{4}\pi D_2^2 p_2$



$D_1=40\text{mm}\quad D_2=20\text{mm}\quad p_1=10^6\text{Pa}$

解得　　$p_2=3\times10^6\text{Pa}$

◎**2—20.** 差动滑阀上有直径为 $D_1=22\text{mm}$ 及 $D_2=20\text{mm}$ 的两个相连的活塞，大活塞上的弹簧预紧力使油路切断。已知弹簧则度为 $k=8\text{N/mm}$，弹簧预紧压缩长度为 10mm，试求接通油路所需的油压压强。（如图 2—20）

[答：$p=1213\text{kPa}$]

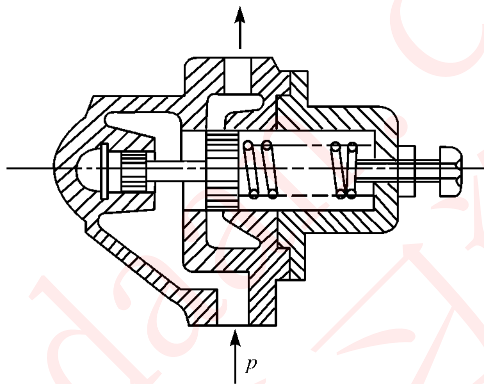


图 2—20

分析　对差动滑阀静力平衡分析，弹簧力等于油压压力。

解　在水平方向上受力平衡　$F+pA_1=pA_2$

即
$$kx=p\times\frac{1}{4}\pi D_2^2-p\times\frac{1}{4}\pi D_1^2$$

$$p=\frac{kx}{\frac{1}{4}\pi(D_2^2-D_1^2)}=\frac{8\times10}{\frac{1}{4}\times\pi(22^2-20)^2\times10^{-6}}$$

$$=1.213\times10^6\text{Pa}=1213\text{kPa}$$

◎**2—21.** 二级液压放大器如图所示，两个柱塞直径均为 $D=2\text{cm}$，$d=1\text{cm}$。已知 $p_1=10\text{kPa}$，$p_2=10^6\text{Pa}$，忽略摩擦力，试求每个柱塞的质量。（如图 2—21）

[答：$m=2.24\text{kg}$]

分析　分别对两个柱塞作力平衡分析。

解 对左边柱塞 $p_1\times\frac{1}{4}\pi D^2+mg=p\times\frac{1}{4}\pi d^2$ ①

对右边柱塞 $p_2\times\frac{1}{4}\pi d^2+mg=p\times\frac{1}{4}\pi D^2$ ②

由①②消去 p 得

$$\frac{p_1\times\frac{1}{4}\pi D^2+mg}{p_2\times\frac{1}{4}\pi d^2+mg}=\frac{d^2}{D^2} \qquad ③$$

由题 $D=2\text{cm}$ $d=1\text{cm}$ $p_1=10\ \text{kPa}$ $p_2=10^6\,\text{Pa}$ 代入③得

$m=2.24\text{kg}$

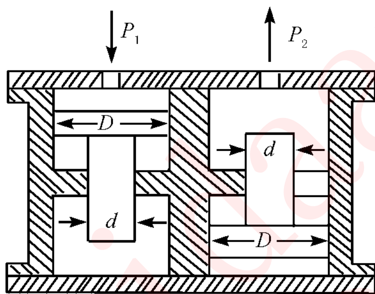


图 2—21

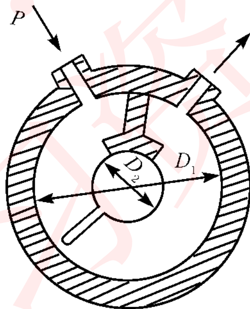


图 2—22

◎**2—22.** 如图 2—22 所示的摆动油马达，由固定外壳及连接在转子上的叶片所组成。当左右油口交替进入高压油时，叶片连同转子产生摆动运动。已知壳体内径 $D_1=10\text{cm}$，转子直径 $D_2=4\text{cm}$，叶片垂直于纸面的宽底 $b=4\text{cm}$，油的计示压强 $p=6\ 000\text{kPa}$，试求摆动油马达的力矩。

[答：$M=252\text{N}\cdot\text{m}$]

分析 液压对叶片作用力 $F=pA$，计算力矩时，对矩形叶片可认为作用力在中心上。

解 叶片的面积 $A=\frac{D_1-D_2}{2}b=\frac{10-4}{2}\times4=12\text{cm}^2$

$F=pA$ 即 $p=6000\times10^3\times12\times10^{-4}=7.2\times10^3\,\text{N}$



$M=FL$

其中 L 为矩形中心到圆心距离 $L=\dfrac{D_2+\dfrac{D_1-D_2}{2}}{2}=3.5\text{cm}$

$$M=7.2\times10^3\times3.5\times10^{-2}=252\text{N}\cdot\text{m}$$

◎**2－23.** 液柱式测力计如图 2－23 所示，在侧壁有通气孔的容器 A 中装入适量汞，罩形的封闭容器 B 内充满酒精，罩盖与容器 A 的内壁可作无摩擦的滑动接触，由于罩盖 B 有一定的质量 $m=14.27\text{kg}$，于是罩内酒精受到压缩，测压管中酒精液面比罩盖高出 h 距离，同时罩盖内外的汞液面形成一定的高度差 x。已知：$d=0.01\text{m}$，$D_1=0.1\text{m}$，$D_2=0.2\text{m}$，$D_3=0.21\text{m}$，$D_4=0.24\text{m}$，罩盖高度 $l=0.8\text{m}$，酒精相对密度为 0.8。

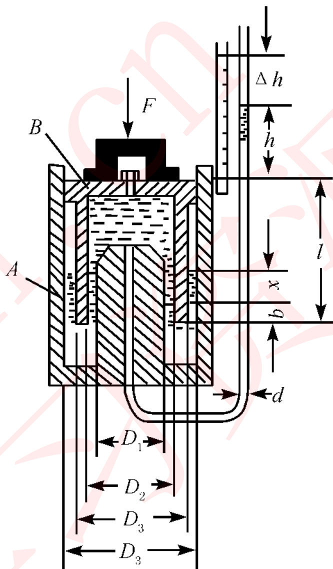


图 2－23

(1)罩盖上未受外力，在其自重作用下淹没于汞中的深度为 $b=0.2\text{m}$，试求此时酒精柱高度 h 及汞液面差 x 是多少？

(2)如果罩盖受外力 F 作用时，测压管中的酒精柱又上升了 $\Delta h=0.2\text{m}$，试求①罩在汞中的淹没深度 t；②罩内外汞液面差 ΔH；③外力 F。

[答：(1)$h=0.22\text{m}$，$x=48$ mm

(2)$t=199.6\text{mm}$；$\Delta H=60.2\text{mm}$；$F=49.9\text{N}$]

分析　酒精的压强可以通过汞液面差，酒精液面差表示。罩盖 B 重力 G 等于酒精和汞的压力之和。

解　(1)当不受外力时，$F=0$，分别用 $p_1\,p_2\,p_3$ 表示酒精表面，底面和罩盖底点压强

对罩盖作力平衡

$$mg=p_1\times\frac{1}{4}\pi D_2^2+p_3\times\frac{1}{4}\pi(D_3^2-D_2^2) \quad ①$$

$$p_2=p_1+\rho_{酒}\ g(1-b) \quad ②$$

$$p_3=p_2+\rho_{汞}\ gb \quad ③$$

即
$$p_3=p_1+\rho_{酒}\ g(l-b)+\rho_{汞}\ gb$$
$$=p_1+\rho_{H_2O}d_{酒}\ g(l-b)+\rho_{H_2O}d_{汞}\ gb \quad ④$$

由测压管可知

$$p_1=\rho_{H_2O}d_{酒}\ gh \quad ⑤$$

由汞液面差表示 p_2

$$p_2=\rho_{汞}\ gx \quad ⑥$$

由题已知　$D_2=0.2\text{m}$　$D_3=0.21\text{m}$　$m=14.27\text{kg}$

将④⑤代入①解得　$h=0.22\text{m}$

将②⑤代入⑥解得 $x=0.048m=48\text{mm}$

(2)同(1)分析

罩盖受力平衡

$$mg+F=p_1\times\frac{1}{4}\pi D_2^2+p_3\times\frac{1}{4}\pi(D_3^2-D_2^2) \quad ⑦$$

$$p_1=\rho_{酒}\ g(h+\Delta h) \quad ⑧$$

$$p_2=p_1+\rho_{酒}\ g(l-t) \quad ⑨$$

$$p_3=p_2+\rho_{汞}\ gt \quad ⑩$$

由汞液面差表示 p_2

$$p_2=\rho_{汞}\ g\Delta H \quad ⑪$$

汞体积守恒

$$\frac{1}{4}\pi(D_2^2-D_1^2)\times b+\frac{1}{4}\pi(D_4^2-D_3^2)\times(b+x)$$
$$=\frac{1}{4}\pi(D_2^2-D_1^2)\times t+\frac{1}{4}\pi(D_4^2-D_3^2)\times(t+\Delta H) \quad ⑫$$

在方程⑦～⑫中　$p_1\,p_2\,p_3$ 以及 $t,\Delta H,F$ 为未知数

联立方程组将 $\Delta h=0.2\text{m}$ 代入解得

$t=0.1996\text{m}=199.6\text{mm}$



$\Delta H=0.0602\text{m}=60.2\text{mm}$

$F=49.9\text{N}$

◎**2—24.** 单向阀弹簧刚度为 $k=6\text{N/mm}$，预压缩量为 $x=5\text{mm}$，钢球直径 $D=24\text{mm}$，入口管道直径 $d=10\text{mm}$，钢球相对密度是 7，试求接通油路所需要的计示压强 p。（如图 2—24）

［答：$p=388\text{kPa}$］

分析 对铜球作力平衡 重力＋弹力＝压力。

解 重力 $G=mg=\rho Vg$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\rho g=\frac{1}{6}\pi D^3\rho g$$

$$=\frac{1}{6}\times\pi\times0.024^3\times7\times10^3\times9.8$$

$$=0.49\text{N}$$

弹簧弹力 $F=kx=6\times5=30\text{N}$

p 所产生压力：$F=p\cdot A=p\cdot\frac{1}{4}\pi d^2$

即得 $\frac{1}{4}\times\pi\times(10\times10^{-3})^2\times p=0.49\times30$

解得 $p=3.88\times10^5\text{Pa}=388\text{kPa}$

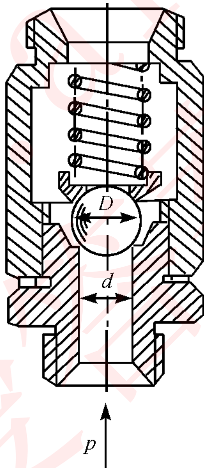


图 2—24

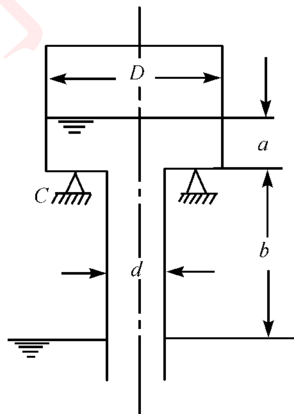


图 2—25

◎**2—25.** 直径 $D=0.8\text{m}$，$d=0.3\text{m}$ 的圆柱形容器质量为 102kg，支承在距离液面为 $b=1.5\text{m}$ 的支架 C 上，由于容器内部建立真空，将水吸入容器。容器内液面高度为 $a+b=1.9\text{m}$，试求支架上的支承力 F。（如图 2—25）

[答：$F=4\ 013\text{N}$]

分析 可以先计算容器内的真空度，然后对容器作力平衡。

解 容器内气体真空度 $p_1=-\rho g(a+b)$

即真空度 $p_1=-1.9\text{mH}_2\text{O}=-1.8639\times10^4\text{Pa}$

容器低真空度 $p_2=-1.5\text{mH}_2\text{O}=-1.4715\times10^4\text{Pa}$

容器受力平衡（在垂直方向上）

$$mg+p_aA_{上}+p_2A_{下}=F+p_aA_{下}+p_1A_{上}$$

$$A_{上}=\frac{1}{4}\pi D^2=\frac{1}{4}\pi\times0.8^2=0.5027\text{m}^2$$

$$A_{下}=\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)=0.4320\text{m}^2$$

取 $p_a=0$（表压）

$102\times9.81-1.4715\times10^4\times0.4320=F-1.8639\times10^4\times0.5027$

解出 $F=4013\text{N}$

◎**2—27.** 如图 2—26 为一种双杯天秤式微真空压差计，两个直径为 $D=0.1\text{m}$ 的薄壁圆筒用 $l=0.26\text{m}$ 的吊杆悬挂在支点上，吊杆中间有一个长为 $a=0.4\text{m}$、端头装有配重 W 的摆杆，薄壁圆筒下端浸入水中，而被测的压强则用细管引入圆筒内。当两端压强相等时，吊杆成水平位置，摆杆指零。当两端有微小压强差时，圆筒微移，吊杆微斜，而摆杆示出倾斜角 α。为了使压强差 $\Delta p=1\ 000\text{Pa}$ 时，杆的倾斜角不超过 10°，试求配重 W 应该是多大？

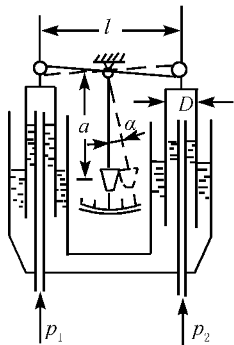


图 2—26

[答：$W=14.48\text{N}$]

分析 压差所产生的力矩与配重 W 所产生力矩应该大小相等、方向相反，使得平秤力矩平衡。



解　压差所产生力矩

$$T_1=F_p\cdot\frac{l}{2}=\Delta p\cdot\frac{1}{4}\pi D^2\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos\alpha$$

配重产生力矩

$$T_2=W\times(a\cdot\sin\alpha)$$

由力矩平衡　$T_1=T_2$

∴　$$\Delta p\times\frac{1}{4}\pi D^2\times\frac{l}{2}\cos\alpha=W\times(a\sin\alpha)$$

代入数值

$$1000\times\frac{1}{4}\times\pi\times0.1^2\times\frac{0.26\times\cos10^\circ}{2}=W\times0.4\times\sin10^\circ$$

解得　$$W=14.48\text{N}$$

◎2—28. 船闸宽度 $B=25\text{m}$，上游水位 $H_1=63\text{m}$，下游水位 $H_2=48\text{m}$，船闸用两扇矩形闸门开闭，试求作用在每个闸门上的水静压力大小及压力中心距基底的标高。（如图 2—27）

[答：$F=1.02\times10^8\text{N}$，$Y=27.9\text{m}$]

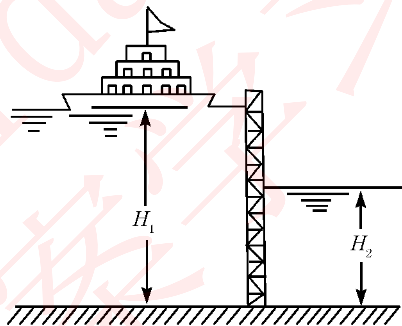


图 2—27

分析　闸门各点高度上压强不同，应积分求压力。

解　选取闸门底为坐标原点，向上为 x 正方向。

上游压强　$p_1=\rho g(H_1-x)$　　$x\in(0,H_1)$

下游压强　$p_2=\rho g(H_2-x)$　　$x\in(0,H_2)$

上游产生压力　$F_1=\int_0^{H_1}p_1B\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{H_1}\rho gB(H_1-x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\rho gBH_1^2$$

产生力矩

$$T_1=\int_0^{H_1}p_1Bx\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{H_1}\rho gB(H_1x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\rho gBH_1^3$$

同理下游产生压力 $F_2=\int_0^{H_2}p_2B\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\rho gBH_2^2$

$$T_2=\int_0^{H_2}p_2Bx\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\rho gBH_2^3$$

$$F_{合}=F_1-F_2=\frac{1}{2}\rho gB(H_1^2-H_2^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times1000\times9.8\times25\times(63^2-48^2)$$

$$=2.04\times10^8\text{N}$$

每扇闸门 $F=\frac{F_{合}}{2}=1.02\times10^8\text{N}$

$$T_{合}=T_1-T_2=\frac{1}{6}\rho gB(H_1^3-H_2^3)$$

$$T_{合}=F_{合}\cdot H$$

因此:压力中心标高

$$H=\frac{T_{合}}{F_{合}}=\frac{\frac{1}{6}\rho gB(H_1^3-H_2^3)}{\frac{1}{2}\rho gB(H_1^2-H_2^2)}=\frac{H_1^3-H_2^3}{3(H_1^2-H_2^2)}$$

$$=\frac{63^3-48^3}{3(63^2-48^2)}=27.9\text{m}$$

◎**2—30.** 如图 2—28 所示的直角形的闸门,垂直纸面的宽度为 B,试求关闭闸门所需的力 F 是多少?已知 $h=1\text{m}$,$B=1\text{m}$。

[答:$F=11\ 445\text{N}$]



分析　对闸门力 F 所产生的力矩大于或等于液压产生力矩，才能关闭，临界值为力矩相等。

解　以转动点为原点，向右为 x 方向，向上为 y 方向。

液压在闸门竖直板上压强分布　　$p_1(y)=(2h-y)\cdot\rho g$

竖直板上产生力矩　$T_1=\int_0^h(2h-y)\rho gBy\,\mathrm{d}y=\dfrac{2}{3}\rho gh^3B$

在水平板上压强　$p_2=\rho gh$

水平板上产生力矩　$F_2=\int_0^h\rho ghBx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\rho gh^3B$

液压产生点力矩　$T=T_1+T_2=\dfrac{7}{6}\rho gh^2B$

由力矩相等　$T_F=T$　即 $Fh=T$

$$F=\frac{7}{6}\frac{\rho gh^2B}{h}=\frac{7}{6}\rho ghB$$

$$=\frac{7}{6}\times9.81\times1000\times1\times1=11445\mathrm{N}$$

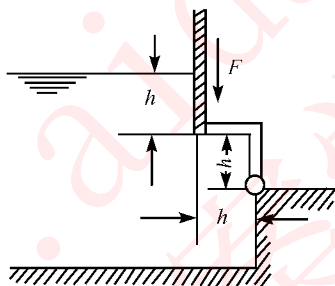


图 2—28

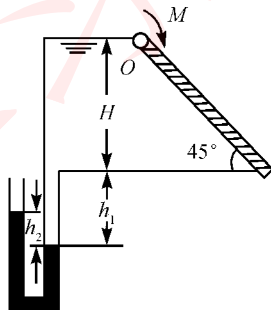


图 2—29

◎**2—31.** 在高度 $H=3$m，宽度 $B=1$m 的柱形密闭高压水箱上，用汞 U 形管连接于水箱底部，测得水柱高 $h_1=2$m，汞柱高 $h_2=1$m，矩形闸门与水平方向成 45°角，转轴在 O 点，为使闸门关闭，试求在转轴上所需施加的锁紧力矩 M。（如图 2—29）

[答：$M=9.36\times10^5$ Nm]

分析　对矩形闸门，锁紧力矩大于或等于液压所产生力矩，液压产

生力矩通过积分求得。

解 水箱顶压力 $p_0=\rho_{汞}h_2g-(H+h_1)\rho_{水}g$

$=13.6\times10^3\times9.8-(3+2)\times10^3\times9.8$

$=8.428\times10^4\,\text{Pa}$

闸门的转动点选择为原点

$$p(x)=p_0+\rho_{水}g(x/\cos45^\circ)=p_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_{水}gx$$

转矩 $$T=\int_0^{H/\cos45^\circ}p(x)x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{H/\cos45^\circ}(p_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\rho_{水}gx)x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{3/\cos45^\circ}(8.428\times10^4+\frac{\sqrt{2}}{2}\times10^3\times9.8x)x\mathrm{d}x$$

$=9.36\times10^5\,\text{N}\cdot\text{m}$

◎**2—32.** 如图 2—30 所示的密封容器内盛有油(相对密度为 0.8)和水两层液体，在油层中有一个弧形闸门，其半径 $R=0.2\text{m}$，容器垂直于纸面的宽度 $B=0.4\text{m}$，油水层厚度均为 $h=0.2\text{m}$，汞测压计中的液柱高也是 $h=0.2\text{m}$，弧形闸门的铰链在 O 点，试求封闭液体所需的力 F 为多少?

[答:$F=1\ 758\text{N}$]

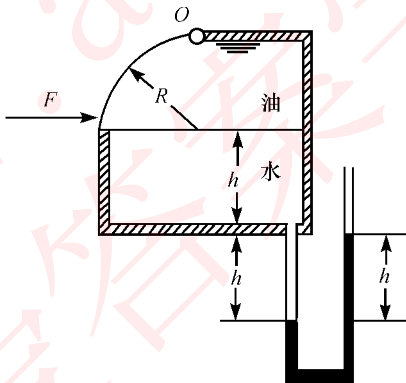


图 2—30

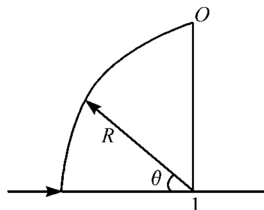


图 2—31



分析　本题为弧形闸门，采用极坐标进行积分。

解　求水油交界面压力　$p_1 = \rho_{汞}gh - \rho_{水}g(h+h)$

弧面上的压力　$p = p_1 + \rho_{水}gR\sin\theta$

求液压所产生转距

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(1-\sin\theta)\,\mathrm{d}F$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R(1-\sin\theta)\,pR\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} pR^2(1-\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2(1-\sin\theta)(p_1+\rho_{水}gR\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

代入数据：$p_1 = 22.76\times10^3\,\mathrm{Pa}$

$$T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0.2^2(1-\sin\theta)(2.276\times10^4+10^3\times9.8\times0.2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 351.6\,\mathrm{N\cdot m}$$

封闭所需力　$F = \dfrac{T}{R} = \dfrac{351.6}{0.2} = 1758\,\mathrm{N}$

◎**2—33.** 内径 $D=3\mathrm{m}$ 的薄壁钢球贮 $p=14.7\times10^5\,\mathrm{Pa}$ 的气体，已知钢球的许可拉应力是 $\sigma=6\times10^7\,\mathrm{Pa}$，试求钢球的壁厚 δ。（如图 2—32）

[答：$\delta=18.5\mathrm{mm}$]

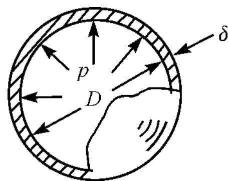


图 2—32

分析　对于钢球，利用课本中公式（2—50）计算压力时，A_x、A_y、A_z 都是球的最大圆面积。

解　由课本中公式（2—50），因为球具有对称性

$$F_x = F_y = F_z = pA = p\cdot\frac{1}{4}\pi D^2$$

$$= 14.7\times10^5\times\frac{1}{4}\times\pi\times3^2$$

$$= 1.04\times10^7\,\mathrm{N}$$

∵
$$\sigma=\frac{F_x}{\pi D\cdot\delta}$$

∴
$$\delta=\frac{F_x}{\pi D\sigma}=\frac{1.04\times10^7}{\pi\times3\times6\times10^7}=0.0185\text{m}=18.5\text{mm}$$

◎2－34. 用熔化铁水(相对密度为 7)铸造带凸缘的半球形零件，试求铁水作用在型箱上的力。(如图 2－33)

已知 $H=0.5\text{m}$，$D=0.8\text{m}$，$R=0.3\text{m}$，$d=0.05\text{m}$，$\delta_1=0.02\text{m}$，$\delta_2=0.05\text{m}$。

[答：$F=12\ 366\text{N}$，方向向上]

分析 本题采用压力体的概念计算，原理及分析过程同例题 2－5。

解 铁水作用在型箱上的向上的力等于压力体液重

$$F=\rho gV_F=\rho g\left\{\frac{\pi}{4}D^2H-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi(R+\delta_1)^3-\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2-(r+\delta_1)^2\right]\delta_2-\frac{\pi}{4}d^3\left[H-(r+\delta_1)\right]\right\}.$$

将铁水密度 $\rho=1000\times7=7000\text{kg/m}^3$ 及其他已知数据代入可得 $F=12366\text{N}$，方向向上．

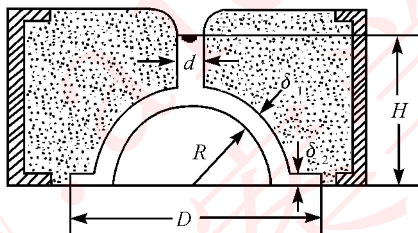


图 2－33

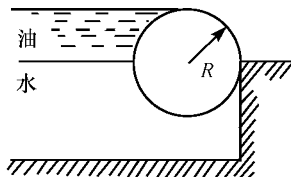


图 2－34

◎2－35. 半径 $R=0.2\text{m}$，长度 $l=2\text{m}$ 的圆柱体与油(相对密度为 0.8)、水接触情况如图 2－34 所示，圆柱体右边与容器顶边成直线接触，试求：

(1)圆柱体作用在容器顶边上的力；

(2)圆柱体的质量与相对密度。

[答：(1)$F=314\text{N}$，(2)$m=240\text{kg}$；$d=0.9546$]



分析　油作用在弧面上的力可分解为水平和竖直方向上，而水作用在圆柱上的力方向向上。因此，可以对圆柱体分别在水平竖直方向上作力平衡分析。

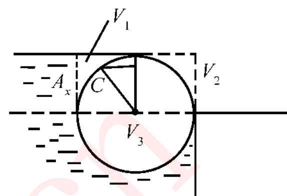


图 2—35

解　(1)在水平方向上，受到油的水平作用力和顶边作用力

$$F_{1x}=\rho g h c A x$$

h_c 表示平面 Ax 的形心 C 与液面的高度

$\therefore h_c=\dfrac{R}{2}=0.1\text{m}$

$A_x=Rl=0.2\times2=0.4\text{m}^2$

$F_{1x}=0.8\times10^3\times9.81\times0.2\times2=314\text{N}$

由水平方向力平衡 $T=F_{1x}=314\text{N}$

(2)在垂直方向，$F_{1y}=\rho_{油}\ gV_1$

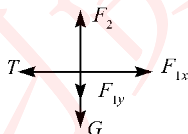


图 2—36

压力体 $V_1=(R^2-\dfrac{1}{4}\pi R^2)l$

$\quad=0.2146R^2 l$

$F_2=\rho_{油}\ gV_2+\rho_{水} gV_3$

V_2 为长方体　$V_2=R\cdot 2R\cdot l=2R^2 l$

V_3 为半圆柱体　$V_3=\dfrac{1}{2}\pi R^2 l=1.571R^2 l$

由垂直方向力平衡　$G=mg=F_2-F_{1y}$

即

$mg=\rho_{油}\ g\times2R^2 l+\rho_{水}\ g\times1.571R^2 l-\rho_{油}\ g\times0.2146R^2 l$

$m=0.8\times10^3\times2R^2 l+10^3\times1.571R^2 l-0.8\times10^3\times0.2146R^2 l$

$\quad=3R^2 l\times10^3$

$\quad=240\text{kg}$

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\pi R^2\cdot l}=\frac{240}{\pi\times0.2^2\times2}$$

$\therefore d=0.9546\text{kg/m}^3$

◎**2－36.** 在水池导管上装有一个蝶形阀，它可以绕其过中心的水平轴旋转，已知阀的直径 $D=50\text{cm}$，试求用阀断水的锁紧力矩 M。(如图 2－37)

[答：$M=30\text{Nm}$]

分析 本题分析同例题 2－4 相似，先求出阀的偏心距和阀心上的作用力可得到(2－61)式。

解 由公式(2－61)

转动轴上的力矩 $M=-F\varepsilon=-\dfrac{\rho g\pi\sin\alpha D^4}{64}$

在此题中 $\alpha=90°$ $D=0.5\text{m}$

$$\therefore M=-\frac{10^3\times9.81\times\pi\times\sin90°\times0.5^4}{64}=30\text{Nm}$$

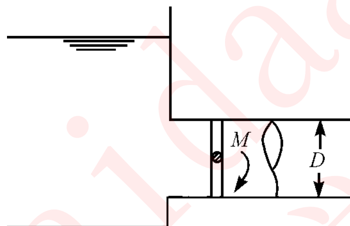


图 2－37

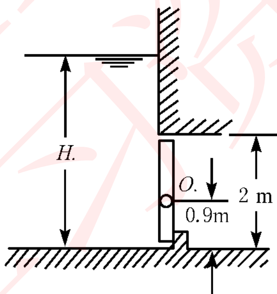


图 2－38

◎**2－37.** 水池中方形闸门每边长均为 2m，转轴 O 距离底边为0.9m，试确定使闸门自动开启的水位高度 H。(如图 2－38)

[答：$H=4.33\text{m}$]

分析 要使闸门能自动开启，则液压作用力矩为顺时针方向。即液压作用点在 O 点之上。

解 设闸中心为 C，压力中心为 D，则偏距 $\varepsilon=CD$. 要使阀能自动开启则 $CD<CO$

由课本中(2－57)式 $\varepsilon=\dfrac{I_C}{l_C A}$

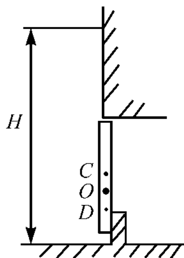


图 2－39



查课本中表 2－2　$I_C=\frac{1}{12}DC^3=\frac{1}{12}\times 2^4=\frac{4}{3}$

$$l_C=H-1$$

$$A=2\times 2=4$$

临界点　$\varepsilon=CO=0.1\text{m}$

$$\therefore\qquad H=\frac{I_C}{\varepsilon A}+1=\frac{\frac{4}{3}}{0.1\times 4}+1=4.33\text{m}$$

◎**2－38.** 直径 $D=1\text{m}$ 的圆柱形容器，一端用平板堵头，一端用半球形堵头密封，容器内充满水，测压管中的液面分别有三种情况：

(1)液面与容器中心线等高，$y=0$；

(2)液面在中心线之上，$y=\frac{D}{5}$；

(3)液面在中心线之下，$y=-\frac{D}{5}$。(如图 2－40)

试求液体作用在平板堵头和半球形堵头上的静水压力。

[答：(1)平板 $F=0$；半球面 $F=0$；

(2)平板 $F=1\,541\text{N}$；半球面 $F=-1\,541\text{N}$；

(3)平板 $F=-1\,541\text{N}$；半球面 $F=1\,541\text{N}$]

分析　对平板堵头，静水压力 $F=\int_A p\text{d}A$ 即可求得，对球形堵头，在水平方向的力等于平板堵头受力，在竖直方向为零。

解　(1)对圆形平板，压力中心即为圆心，由课本中(2－53)式

$$F_1=\rho g h_c A\qquad 其中\ h_c=y$$

当 $y=0$ 时，$h_c=0$

$$F_1=0$$

同理，对球形堵头

$$F_2=F_{2x}=\rho g h c A x=0$$

(2)当 $y=\frac{D}{5}$时　　$h_c=\frac{D}{5}=0.2\text{m}$

对平板堵头　$F_1=\rho g h_c A$

$$=10^3\times9.81\times0.2\times\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=1541\text{N}$$

对球形堵头　$F_2=F_{2x}=-F_1=-1541\text{N}$

(3)当 $y=-\dfrac{D}{5}$时　$h_c=-\dfrac{D}{5}=-0.2\text{m}$

对平板堵头　$F_1=\rho g h_c A$
$$=10^3\times9.81\times(-0.2)\times\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$=-1541\text{N}$$

对球形堵头　$F_2=F_{2x}=-F_1=1541\text{N}$

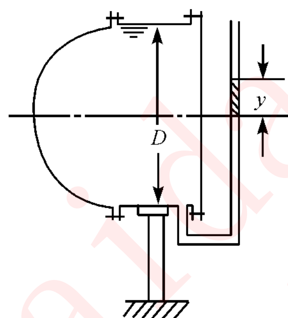


图 2—40

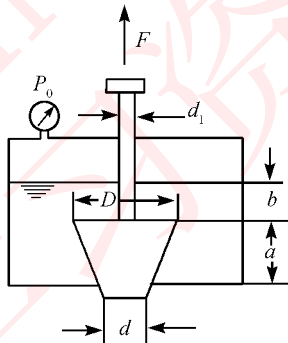


图 2—41

◎**2—39.** 汽油箱和底部装有一截头圆锥形阀门，其尺寸为 $D=100\text{mm}$，$d=50\text{mm}$，$d_1=25\text{mm}$，$a=100\text{mm}$，$b=50\text{mm}$，汽油相对密度为 0.7，忽略阀重。

(1)当压强表 $p_0=10\text{kPa}$ 时，示提起阀门所需的力 F；

(2)如果 $F=0$，求压强表读数 p_0 应是多少？（如图 2—41）

[答：$F=13.4\text{N}$，$p_0=8.8\text{kPa}$]

分析　作用于阀门上的力等于各边作用力之和。在垂直方向上，受到上表面作用力和侧面的一个分力。

解　(1)上表面压力 $p_1=p_0+\rho g b$



$$F_1=p_1\cdot S_1=(p_0+\rho gb)\cdot\frac{1}{4}\pi(D^2-d_1^2) \qquad ①$$

$$F_1=(10\times10^3+0.7\times10^3\times9.81\times50\times10^{-3})\times\frac{1}{4}\times\pi(100^2-25^2)\times10^{-6}$$

$$=76.12\text{N}$$

侧面作用力在竖直方向上的分力等于压力体液重加上液表压力

压力体体积

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)\times a+\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)\times b$$

$$=\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)\times(\frac{a}{3}+b)$$

$$F_2=\rho gV+p_0S_{2y}=\rho gV+p_0\cdot\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)$$

$$=\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2)\times\left[\left(\frac{a}{3}+b\right)\cdot\rho g+p_0\right] \qquad ②$$

$$F_2=\frac{1}{4}\pi(100^2-50^2)\times10^{-6}\times\left[\left(\frac{100}{3}+50\right)\times0.7\times9.81+10\times10^3\right]$$

$$=62.24\text{N}$$

由竖直方向力平衡

$$F=F_1-F_2=13.9\text{N}$$

(2)如果 $F=0$,即 $F_1=F_2$

由①②两式解方程得

$$p_0=8.8\times10^3\text{Pa}=8.8\text{kPa}$$

◎**2—40.** 直径 $D=0.4$m,质量 $m=50.97$kg 的圆柱形容器,其中充水深度 $a=0.3$m 悬挂在直径 $d=0.2$m 的柱塞上,柱塞淹没深度为 $h=0.1$m,忽略柱塞与容器间的摩擦,试确定:

(1)使容器保持平衡所需要的真空度 p_a-p_0;

(2)螺栓组 A、B 所受的力;

(3)分析栓塞淹没深度 h 对计算结果的影响。(如图 2—42)

[答:(1)$p_a-p_0=27\ 900$Pa,

(2)$F_A=2\ 629.5\text{N}$,$F_B=3\ 136\text{N}$,

(3)如果 h 变化而 a 不变,则对计算结果没有影响;

如果 h 变化,a 变大,真空度越小,F_A、F_B 均减小;

如果 h 变化,a 变小,真空度加大,F_A、F_B 均加大。]

分析 分别对整个圆柱形容器(含水),$A-A$,$B-B$ 面作力平衡分析。

解 (1)对整个容器(含水)受力分析

柱塞对容器作用力 $F=G$

G 为容器总重

$$G=mg+\rho g V_{水}=mg+\rho g\left(\frac{1}{4}\pi D^2\cdot a-\frac{1}{4}\pi d^2\cdot h\right) \quad ①$$

$$F=p_1\cdot S=p_1\cdot\frac{1}{4}\pi\times d^2=0.01\pi p_1 \quad ②$$

$$\therefore \quad p_1=\frac{F}{0.01\pi}=\frac{G}{0.01\pi}$$

$$p_a-p_o=p_1+\rho gh$$

$$=\frac{mg+\rho g\left(\frac{1}{4}\pi D^2 a-\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)}{0.01\pi}+\rho gh \quad ③$$

代入数据得 $p_a-p_o=2.79\times10^4\ p_a$

(2)对 $A-A$ 面,作力平衡,受到螺栓组拉力 F 及液压力 $p_A\cdot S_A$

$$F_A=p_A S_A=[(p_a-p_o)-\rho g a]\times\frac{1}{4}\pi D^2 \quad ④$$

代入数据得 $F_A=3.136\times10^3\text{N}$

同理对 $B-B$ 面

$$F_B=p_B S_B=(p_a-p_o)\times\frac{1}{4}\pi(D^2-d^2) \quad ⑤$$

代入数据得 $F_B=2.6295\times10^3\text{N}$

(3)如果 h 变化而 a 不变,则由③式可知 . p_a-p_o 不变,由④、⑤可知 F_A F_B 不变;

如果 h 变化,a 变大,由③知真空度越小,由④⑤知,F_A、F_B 变小;



如果 h 变化，a 变小，由③知真空度越大，由④⑤知 F_A、F_B 变大。

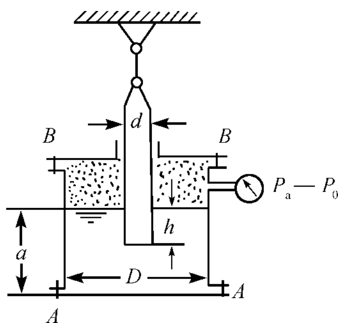


图 2—42

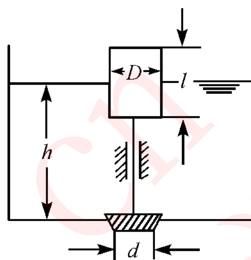


图 2—43

◎**2—41.** 设计自动泄水阀要求当水位 $h=25$cm 时，用沉没一半的圆柱形浮标将细杆所连接的堵塞自动提起。已知堵塞直径 $d=6$cm，浮标长 $l=20$cm，活动部件的质量 $m=0.08$kg，试求浮标直径 D，如果浮标改用圆球形，则其半径 R 应是多少？（如图 2—43）

［答：$D=10$cm，$R=6.2$cm］

分析　分别对阀和浮标受力分析。浮标受到浮力等于排液液重。

解　(1)浮标受到重力 G、浮力 F 和阀的拉力 T

$$T=F-G=\rho gV-mg=\rho g\frac{1}{4}\pi D^2\frac{l}{2}-mg \quad ①$$

阀受到浮标拉力 T 和液压 F_1

$$T=F_1=p_1\cdot\frac{1}{4}\pi d^2=\rho gh\cdot\frac{1}{4}\pi d^2 \quad ②$$

由①②得　$\frac{1}{4}\pi\rho gD^2\frac{l}{2}-mg=\frac{1}{4}\pi\rho gd^2h$

代入数据解得　　$D=0.1\text{m}=10\text{cm}$

(2)若改用球形，则只需满足体积相等

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{4}\pi D^2\cdot l$$

解出　　$R=6.2\text{cm}$

◎**2—42.** 一个物体在水中重量 $W_1=3$N，在相对密度为 0.8 的油中

重量 $W_2=4\text{N}$，试求该物体的体积、质量、密度和相对密度。（如图2—44）

[答：$V=510\text{cm}^3$，$m=0.815\text{kg}$，$\rho=1\ 599\text{kg/m}^3$，$d=1.599$]

分析 物体在液体中的浮力等于其排液液重。

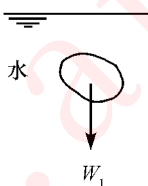
解 由受力平衡：
$$W=G-F$$
$$G=mg-\rho Vg$$
$$F=\rho_{液}Vg$$

因此
$$W=(\rho-\rho_{液})Vg$$
$$W_1=(\rho-\rho_{水})Vg \qquad ①$$
$$W_2=(\rho-\rho_{油})Vg \qquad ②$$

由①/②得
$$\frac{\rho-\rho_{水}}{\rho-\rho_{油}}=\frac{3}{4}$$

代数据得
$$\rho=1599\text{kg/m}^3$$

代入①或②得
$$V=5.1\times10^{-4}\text{m}^3=510\text{cm}^3$$
$$m=\rho V=0.185\text{kg}$$
$$d=\frac{\rho}{\rho_{水}}=1.599$$



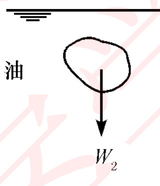


图 2—44

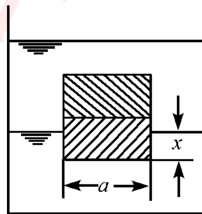


图 2—45

◎**2—43.** 每边长为 $a=1\text{m}$ 的正立方体（上半部分的相对密度是0.6，下半部分的相对密度是1.4）平衡于两层不相混合的液体中，上层液体相对密度是0.9，下层液体相对密度是1.3，试求立方体底面在两种液体交界面下面的深度 x。（如图2—45）

[答：$x=0.25\text{m}$]

分析 立方体所受浮力等于排液液重，排液分为上层和下层两部分，浮力为两部分液重之和。



解　重力　　$G=G_1+G_2$

$$=\rho_{s_1}g\frac{1}{2}a^3+\rho_{s_2}g\cdot\frac{1}{2}a^3=\frac{\rho_{s_1}+\rho_{s_2}}{2}ga^3$$

浮力　$F=F_1+F_2$

$$=\rho_{l1}ga^2\cdot(a-x)+\rho_{l2}ga^2x$$

$$=[\rho_{l1}(a-x)+\rho_{l2}x]ga^2$$

由力平衡 $G=F$

得　$$\frac{\rho_{s_1}+\rho_{s_2}}{2}=\rho_{l1}(a-x)+\rho_{l2}x$$

ρ_{s_1} 为上半部分立方体密度　　$\rho_{s_1}=0.6\times10^3\,kg/m^3$

ρ_{s_2} 为下半部分立方体密度　　$\rho_{s_2}=1.4\times10^3\,kg/m^3$

ρ_{l1} 为上层液体密度　　$\rho_{l1}=0.9\times10^3\,kg/m^3$

ρ_{l2} 为下层夜体密度　　$\rho_{l2}=1.3\times10^3\,kg/m^3$

解得　　$x=0.25m$

●2－44. 边长 b 的敞口立方水箱中原来装满水，当容器以匀加速度向右运动时，试求：

(1)水溢出$\frac{1}{3}$时的加速度 a_1，

(2)水剩下$\frac{1}{3}$时的加速度 a_2。(如图 2－46)

[答：$a_1=6.54m/s^2$，$a_2=14.715m/s^2$]

分析　作匀加速直线运动时，水箱内的等压面方程为 $ay-gz=0$，等压面倾斜角 $\theta=arctg\,\frac{a}{g}$。

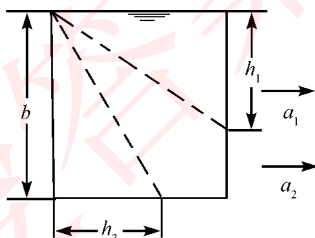


图 2－46

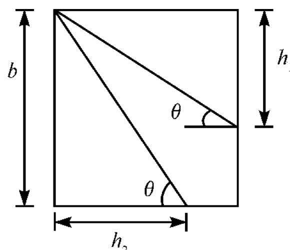


图 2－47

解　(1)水溢出$\frac{1}{3}$时,由几何知识

$$\frac{1}{2}h_1 b=\frac{1}{3}b^2 \quad 即 \quad h_1=\frac{2}{3}b$$

$$tg\ \theta=\frac{h_1}{b}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad a_1=g\cdot tg\theta=\frac{2}{3}g=6.54\text{m/s}^2$$

(2)水溢出$\frac{2}{3}$时　由几何知识

$$\frac{1}{2}h_2 b=(1-\frac{2}{3})b^2 \qquad 得 \quad h_2=\frac{2}{3}b$$

$$tg\theta=\frac{b}{h_2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \qquad a_2=g\cdot tg\theta=\frac{3}{2}g=14.715\text{m/s}^2$$

小结　本题中几何分析较为重要。

◎**2—45.** 边长 $b=1\text{m}$ 的顶部敞口立方水箱中盛水深度 $h=0.75\text{m}$,容器有水平向右、铅直向上的两部分匀加速度(a_y 及 a_z),其大小相等,并使水达到即将外溢的极限状态。试求加速度的大小及容器底角上 A、B 两点的计示压强。(如图 2—48)

[答:$a_y=a_z=9.81\text{m/s}^2$,$p_A=19\ 620\text{Pa}$,$p_B=9\ 810\text{Pa}$]

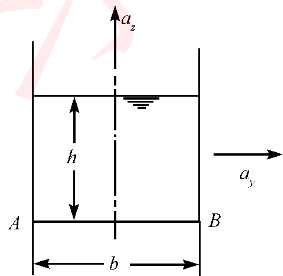


图 2—48

分析　当容器向上的加速度为 a_z 时,可视为重力加速度 g_1 变为 $(g+a_z)$,再用等压面方程和倾斜角进行分析,倾斜角 $\theta=arctg\frac{a_y}{g_1}$。

解　由几何分析,当水将要溢出时,

$$tg\theta=\frac{2(b-h)}{b}=\frac{2(1-0.75)}{1}=\frac{1}{2}$$



$$tg\theta=\frac{a_y}{g_1}$$

即 $$\frac{a_y}{g+a_z}=\frac{1}{2}$$

由题已知 $a_y=a_z$

$\therefore\ a_y=a_z=g=9.81\text{m/s}^2$

由(2—70)求压力分布

$p=p_o+\rho gH$　(对表面 $p_o=0$)

$$p_A=p_o+\rho g_1 b=\rho g_1 b=\rho(g+a_z)b=2\rho gb$$
$$=2\times9.81\times10^3\times1$$
$$=19620\text{Pa}$$
$$p_B=p_o+\rho g_1(2h-b)=2\rho g(2h-b)$$
$$=2\times9.81\times10^3\times(2\times0.75-1)$$
$$=9810\text{Pa}$$

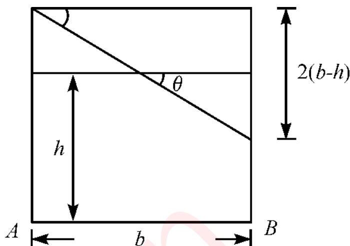


图 2—49

●**2—46.** 飞机油箱的尺寸为高 $h=0.4$m，长 $l=0.6$m，宽 $b=0.4$m，装油占油箱体积的 $\frac{1}{3}$，出油口在底部中心处，试求使油面处于出油口中心时的水平飞行的极限加速度 $a_{max}\left(此时箱内油量仍为\frac{1}{3}\right)$。(如图 2—50)

[答：$a_{max}=19.62\text{m/s}^2$]

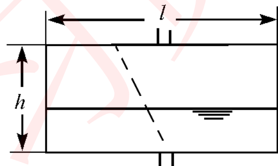


图 2—50

分析　飞机作匀加速直线运动，液面倾斜角 $\theta=arctg\,\frac{a}{g}$。

解　由几何图形知

当剩油 1/3 时，极限油面如图 2—51

$$\frac{1}{2}l'h=(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})hl$$

解得 $$l'=\frac{1}{3}l$$

$$tg\theta=\frac{h}{l'}=\frac{0.4}{\frac{1}{3}\times0.6}=2$$

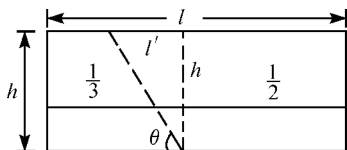


图 2—51

∴ $$a_{max}=g\cdot tg\theta=2g=19.62\text{m/s}^2$$

小结 本题的解题关键在于对极限情况的理解。

◎**2—47.** 正方形底 $b\times b=0.2\text{m}\times0.2\text{m}$、自重 $W'=40\text{N}$ 的容器装水高度 $h=0.15\text{m}$，容器在重锤 $W=250\text{N}$ 的牵引下沿水平方向匀加速运动，设容器底与桌面间的摩擦系数 $f=0.3$，滑轮磨擦忽略不计，为使水不外溢试求容器应有的高度 H。(如图 2—52)

[答：$H=0.213\text{m}$]

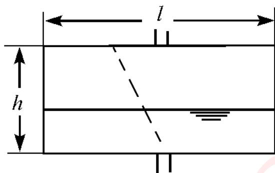


图 2—52

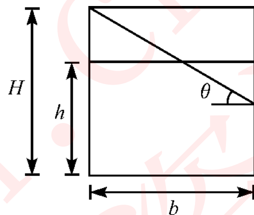


图 2—53

分析 利用牛顿第二定律求出容器水平运动加速度 a，则倾斜角 $\theta=arctg\dfrac{a}{g}$。

解 容器质量 $$m'=\frac{W'}{g}$$

水的质量 $$m=\rho gV=\rho b^2hg$$

重锤质量 $$M=\frac{w}{g}$$

由牛顿第二定律 $$(m'+m+M)a=w-f(w'+mg)$$

即得 $$a=0.732\text{m/s}^2$$

$$tg\theta=\frac{a}{g}=0.075$$

由图 $$tg\theta=\frac{2(H-h)}{b}$$

解得 $$H=0.158$$

◎**2—48.** 油槽车的圆柱直径 $d=1.2\text{m}$，最大长度 $l=5\text{m}$，油面高度 $b=1\text{m}$，油的相对密度为 0.9。

(1)当水平加速度 $a=1.2\text{m/s}^2$ 时，求端盖 A，B 所受的轴向压力；



(2)当端盖 A 上受力为零时,求水平加速度 a 是多少。(如图 2—54)

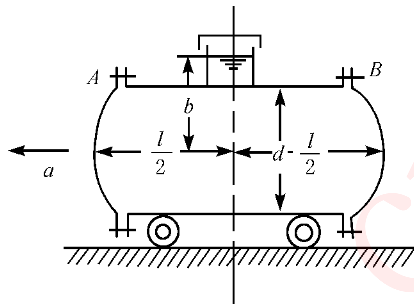


图 2—54

[答:$F_A=6\ 932\text{N}$,$F_B=13\ 039\text{N}$,$a=3.924\text{m/s}^2$]

分析　油槽车作加速运动时,端盖的压强为大气压,可根据压力分布求车内各点压强。

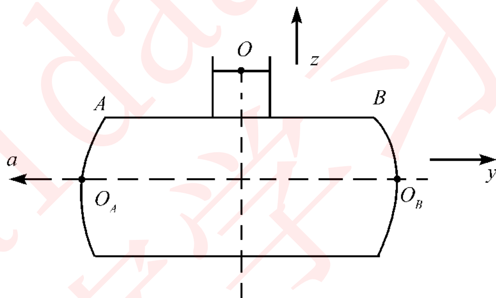


图 2—55

解　(1)当 $a=1.2\text{m/s}^2$ 时,选择端盖为 O 点

由式(2—68)

$$p=p_O+\rho(ay-gz)$$

$$p_{O_A}=\rho\left[-\frac{l}{2}a-(-b)g\right]=\rho\left(bg-\frac{l}{2}a\right) \qquad ①$$

同理

$$p_{O_B}=\rho\left(bg+\frac{l}{2}a\right) \qquad ②$$

对端盖 A 轴向受力 $F_A=p_{O_A}\cdot\frac{1}{4}\pi d^2$

即 $F_A=\rho(bg-\dfrac{l}{2}a)\times\dfrac{1}{4}\pi d^2$ ③

代入数据 $F_A=6932\text{N}$

同理 $F_B=\rho(bg+\dfrac{l}{2}a)\times\dfrac{1}{4}\pi d^2$ ④

代入数据 $F_B=13039\text{N}$

(2)要使 A 受力为 0,即 $F_A=0$ 由③式

$$bg=\frac{l}{2}a \qquad a=\frac{2b}{l}g$$

即 $a=\dfrac{1\times2}{5}\times9.81=3.924\text{m/s}^2$

◎**2—49.** 复合圆柱形容器的尺寸是 $D_1=0.4\text{m}$,$D_2=0.6\text{m}$,$h_1=0.5\text{m}$,$h_2=0.3\text{m}$,容器经过绳索、滑轮与另一端重力为 $W=2\ 000\text{N}$ 的重物相连,忽略容器自重及滑轮摩擦,试求容器发生加速运动时,作用在螺栓组 A、B 和 C 上的拉力。(如图 2—56)

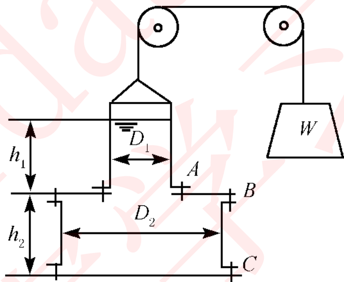


图 2—56

[答:$F_A=1\ 680\text{N}$,$F_B=2\ 574\text{N}$,$F_C=2\ 574\text{N}$]

分析 由牛顿第二定律,可求得容器的加速度,再由静压力分布可求 A、B、C 三点的压强。

解 容器中液体质量

$$m=\rho V=\rho(\frac{1}{4}\pi D_1^2h_1+\frac{1}{4}\pi D_2^2h_2)=\frac{1}{4}\pi\rho(D_1^2h_1+D_2^2h_2)$$

$$=\frac{1}{4}\pi\times10^3\times(0.4^2\times0.5+0.6^2\times0.3)$$

$$=147.65\text{kg}$$



$$F_{合}=W-mg=2000-147.65\times9.81=551.5\text{N}$$

$$a=\frac{F_{合}}{(m+W/g)}=1.569\text{m}^2/\text{s}$$

$$g'=g+a=11.379\text{m}^2/\text{s}$$

$$p_C=\rho g'(h_1+h_2)$$
$$=10^3\times11.379\times(0.5+0.3)$$
$$=9.103\times10^3\text{Pa}$$

$$p_A=p_B=\rho g'h_1=5.69\times10^3\text{Pa}$$

对底板作力平衡　　$F_C-p_C\cdot\frac{1}{4}\pi D_2^2=0$

$$F_C=p_C\cdot\frac{1}{4}\pi D_2^2=9.103\times10^3\times\frac{1}{4}\times\pi\times0.6^2=2574\text{N}$$

忽略容器 2 的重量

$$F_B=F_C=2574\text{N}$$

对容器 2 的顶盖作力平衡　　$F_B-F_A=p_B\frac{1}{4}\pi(D_2^2-D_1^2)$

$$\therefore\quad F_A=2574-5169\times10^3\times\frac{1}{4}\times\pi\times(0.6^2-0.4^2)=1680\text{N}$$

●**2－50.** 直径 $D=0.2$m，高度 $H=0.1$m 的圆柱形容器，装水$\frac{2}{3}$容量后，绕其垂直轴旋转。

(1)试求自由液面到达顶部边缘时的转速 n_1。

(2)试求自由液面到达底部中心时的转速 n_2。(如图 2－57)

[答：$n_1=109.2$r/min，$n_2=163.8$r/min]

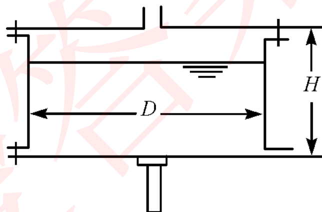


图 2－57

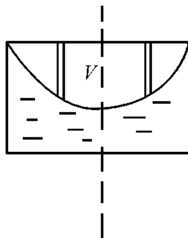


图 2－58

分析 容器作匀速转动时自由表面方程为

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}\text{，最大超高 } H=\frac{\omega^2 R^2}{2g}\text{。}$$

解 (1)当自由液面到顶边缘时，液面上空的部分 V 为容器体积的 1/3

$$V=\int_0^R 2\pi r\frac{\omega^2 r^2}{2g}\mathrm{d}r=\int_0^R\frac{\pi\omega^2}{g}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi\omega^2}{4g}R^4 \qquad ①$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H \qquad ②$$

由①②得 $$\frac{\pi\omega^2 R^4}{4g}=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$$

即 $$\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gH}$$

$$n_1=\frac{30\omega}{\pi}=\frac{30}{\pi R}\sqrt{\frac{4}{3}gH}=\frac{30}{\pi D}\sqrt{\frac{gH}{3}}$$

代入数据 $n_1=109.2\mathrm{r/min}$

(2)当自由液面到达底部中心时 令 $Z=H$ 可得 $r=\frac{1}{\omega}\sqrt{2gH}$ 同(1)对液面上空部分积分求体积.

$$V=\int_0^{\frac{1}{\omega}\sqrt{2gH}}2\pi r\frac{\omega^2 r^2}{2g}\mathrm{d}r=\frac{\pi\omega^2}{4g}\cdot\frac{1}{\omega^4}(2gH)^2$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

则 $$\frac{\pi\omega^2}{4g}\frac{1}{\omega^4}(2gH)^2=\frac{1}{3}\pi R^2 H$$

即 $$\omega=\frac{1}{R}\sqrt{3gH}$$

$$n_2=\frac{30}{\pi}\omega=\frac{30}{\pi R}\sqrt{3gH}$$

代入数据 $n_2=163.8\mathrm{r/min}$

小结 本题是对容器作匀速转动时的自由表面方程的考查，注意积分应用。



◎2－51. 直径 $D=0.2\text{m}$，高 $H=0.1\text{m}$ 的圆柱形容器装 $\frac{1}{3}$ 容积水后，绕垂直轴旋转，当转速 $n=200\text{r/min}$ 时形成如图 2－59 所示的抛物面，试求液面与顶盖及底盖接触处的半径 r_1 及 r_2，并求液面抛物面顶点在底面以下的距离 h。

[答：$r_1=0.094\text{m}$，$r_2=0.067\text{m}$，$h=0.1\text{m}$]

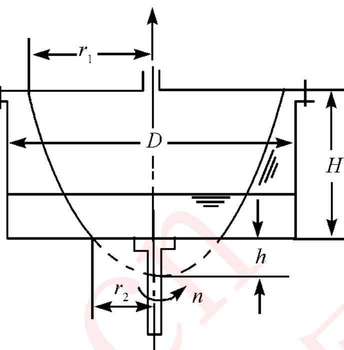


图 2－59

分析 将液面曲线补成完整抛物线。

解 当 $r=r_2$ 时 $z=h$ $\quad h=\frac{w^2}{2g}r_2^2$

解得
$$r_2=\frac{1}{\omega}\sqrt{2gh} \qquad ①$$

当 $r=r_1$ 时 $z=H+h$ $\quad H+h=\frac{\omega^2}{2g}r_1^2$

解得
$$r_1=\frac{1}{\omega}\sqrt{2g(H+h)} \qquad ②$$

求容积中空部分体积 $\quad V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot H$

$$V=-\int_{r_2}^{r_1}2\pi r\frac{\omega^2 r^2}{2g}dr+\pi r_2^2 H+\pi(r_1^2-r_2^2)(H+h)$$

$$=-\frac{\pi\omega^2}{4g}\frac{4g^2}{\omega^4}[(H+h)^2-h^2]+\pi r_2^2 H+\pi(r_1^2-r_2^2)(H+h)$$

$$=-\frac{\pi g}{\omega^2}(H^2+2hH)+\pi r_2^2 H+\pi(r_1^2-r_2^2)(H+h)$$

即
$$\pi r_2^2 H+\pi(r_1^2-r_2^2)(H+h)-\frac{\pi g}{\omega^2}(H^2+2hH)=-\frac{1}{6}\pi D^2 H \qquad ③$$

其中
$$\omega=\frac{\pi}{30}n=\frac{\pi}{30}\times 200=20.94\text{rad/s}$$

代入数据解方程①②③得

$$r_1=0.094\text{m} \qquad r_2=0.067\text{m} \qquad h=0.1\text{m}$$

●**2－52.** 承前题数据，$D=0.2\text{m}$，$H=0.1\text{m}$，装水$\frac{1}{3}$容积。

(1)当 $n=200\text{r/min}$ 时，试求液体作用在顶盖、底盖上压力 F_1、F_2 各是多少？顶盖与底盖螺栓组 A，B 上的拉力 F_A、F_B 是多少？容器重量忽略不计。

(2)当 $n=100\text{r/min}$ 时，试求液体作用在顶盖、底盖上的压力 F_1、F_2，螺栓组 A，B 上的拉力 F_A、F_B。(如图 2－60)

[答：(1)$F_1=0.4156\text{N}$，$F_2=10.7\text{N}$，$F_A=10.69\text{N}$，$F_B=10.7\text{N}$，
(2)$F_1=0$，$F_2=10.27\text{N}$，$F_A=F_B=10.27\text{N}$]

分析 如果把原点取在抛物线顶点，则液体中各点压强分布规律 $p=p_0+\rho g(\frac{\omega^2r^2}{2g}-z)$。

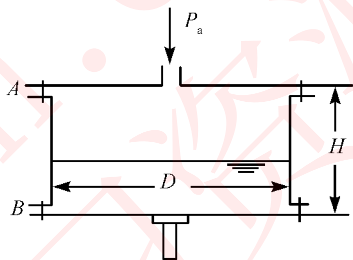


图 2－60

解 (1)对上盖作用力

$$F_1=\int_{r_1}^{R}p\cdot 2\pi r\text{d}r$$
$$=\int_{r_1}^{R}\rho g(\frac{\omega^2r^2}{2g}-z)\cdot 2\pi r\text{d}r$$
$$=\int_{r_1}^{R}\rho g\left[\frac{\omega^2r^2}{2g}-(H+h)\right]\cdot 2\pi r\text{d}r$$
$$=\frac{\pi}{4}\rho\omega^2(R^4-r_1^4)-\rho g\pi(H+h)(R^2-r_1^2)$$

$$\omega=\frac{\pi}{30}n=\frac{\pi}{30}\times 200=\frac{20}{3}\pi$$

$R=\frac{D}{2}$，代入数据得 $F_1=0.4156\text{N}$

同理对下盖作用力

$$F_2=\int_{r_2}^{R}\rho g(\frac{\omega^2r^2}{2g}-z)\cdot 2\pi r\text{d}r$$
$$=\int_{r_2}^{R}\rho g(\frac{\omega^2r^2}{2g}-h)\cdot 2\pi r\text{d}r$$
$$=\frac{\pi}{4}\rho\omega^2(R^4-r_2^4)-\rho g\pi h(R^2-r_2^2)$$



$R=\dfrac{D}{2}$,代入数据得 $F_2=10.7\text{N}$

忽略盖重则下盖由受力平衡　$F_B=F_2=10.7\text{N}$

由容器壁受力平衡　$F_A=F_B=10.7\text{N}$

(2)当 $n=100\text{r/min}$ 时　$\omega=\dfrac{\pi}{30}n=\dfrac{10}{3}\pi$

当 $r=R$ 时 $z=\dfrac{\omega^2R^2}{2g}=0.056<0.1=H$

此时液面没有与上盖接触　$F_1=0$ 对旋转抛物面积分

$$V'=\int_o^R 2\pi r\frac{\omega^2 r}{2g}\mathrm{d}r=\frac{\pi\omega^2}{4g}R^4=8.78\times10^{-4}\text{m}^3$$

而容器中液体体积

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=1.047\times10^{-3}\text{m}^3$$

因此液面中心没有到达底部中心,其距离

$$h=\frac{V-V'}{\pi R^2}=\frac{1.047\times10^{-3}-8.78\times10^{-4}}{\pi\times0.1^2}=5.39\times10^{-3}\ \text{m}$$

由(2—82)底边压强分布　$p=\rho g(\dfrac{\omega^2r^2}{2g}+h)$

积分　$$F_2=\int_o^R p\cdot2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=\int_o^R\rho g(\frac{\omega^2r^2}{2g}+h)\cdot2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}\rho\omega^2R^4+\rho gh\cdot\pi R^2$$

代入数据　$F_2=10.27\text{N}$

由下盖受力平行　$F_B=F_2=10.27\text{N}$

由容器壁受力平衡　$F_A=F_B=10.27\text{N}$

小结　本题综合性较强,请注意其中的物理分析及数学中积分的应用。

◎**2—53.** 直径为 $d=0.2\text{m}$ 的开口容器连接在半径为 $l=0.46\text{m}$ 的旋转臂上,当旋臂转速为 $n=60\text{r/min}$ 时,求容器中的液面差 h。(如图 2—61)

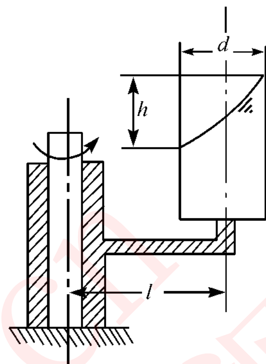


图 2—61

[答：$h=0.37\text{m}$]

分析 由课本公式(2—78)液面方程

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

解 液面最低点 $z_1=\frac{\omega^2}{2g}(l-\frac{d}{2})^2$

液面最高点 $z_2=\frac{\omega^2}{2g}(l+\frac{d}{2})^2$

$$h=z_2-z_1=\frac{\omega^2}{2g}2ld=\frac{ld}{g}\omega^2$$

$$\omega=\frac{\pi}{30}n=2\pi\text{rad/s}$$

代入数据

$$h=\frac{ld}{g}\cdot 4\pi^2=0.37\text{m}$$

◎**2—54.** 医用手摇离心机当立轴转动时，铰接于横杆上的度管架一方面转动，一方面由于离心力作用而成倾斜状态。已知离心机转速为 $n=400\text{r/min}$，$r=250\text{mm}$，试求试管中液体的质量力比重力大多少倍？此时管轴线与水平线的夹角 α 是多少？（如图 2—62）

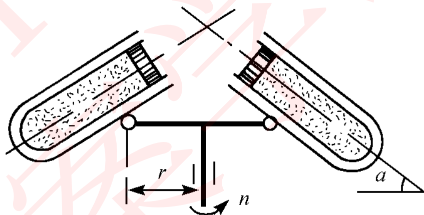


图 2—62

[答：$\frac{F_m}{W}=44.73$，$\alpha=1°17'$]

分析 试管内液体的的重力 $W=mg$，而惯性力 $F=m\omega^2 r$。

解 由题知 $n=400\text{r/min}$ 则 $\omega=\frac{\pi}{30}n=\frac{40}{3}\pi$

$$F=m\omega^2 r=m(\frac{\pi}{30}n)^2 r$$



代入数据　$F=438.65m$

$$F_m=\sqrt{F^2+W^2}=438.76m$$

$$\frac{F_m}{W}=\frac{438.76m}{mg}=44.73$$

∵管轴线方向为质量力方向

∴
$$\sin\alpha=\frac{F}{W}=\frac{1}{44.73}$$

解得　$\alpha=0.0223=1°17'$

●**2—55.** 顶盖中心开口的圆柱形容器半径为 $R=0.4\text{m}$，高度为 $H=0.7\text{m}$，顶盖质量为 $m=5.1\text{kg}$，装入 $V=0.25\text{m}^3$ 的水，然后以匀角速度 $\omega=10\text{s}^{-1}$ 绕垂直轴转动，试求作用在顶盖螺栓组上的拉力。(如图 2—63)

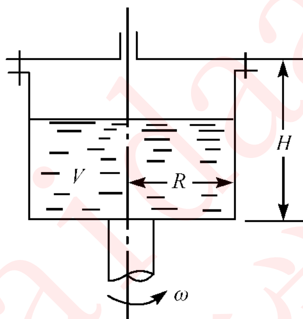


图 2—63

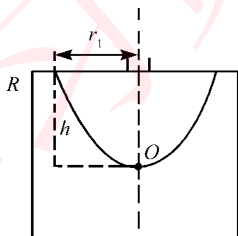


图 2—64

[答：$F=124.86\text{N}$]

分析　首先得求出转动时容器内的压力分布。

解　由课本公式(2—78)液面方程 $z=\dfrac{\omega^2r^2}{2g}$

则
$$h=\frac{\omega^2r_1^2}{2g}$$

液面上空部分面积

$$V_O=\int_0^{r_1}2\pi r\frac{\omega^2r^2}{2g}\text{d}r=\frac{\pi\omega^2}{4g}r_1^4$$

$$V_O=\pi R^2\cdot H-V=\pi\times0.4^2\times0.7-0.25=0.102\text{m}^3$$

则 $$r_1=0.336\text{m}$$

静压强分布
$$p=p_0+\rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}-h\right)$$
$$=\rho g\frac{\omega^2}{2g}(r^2-r_1^2)$$
$$=\frac{\rho\omega^2}{2}(r^2-r_1^2)$$
$$F=\int_{r_1}^{R}2\pi r\cdot p\,\mathrm{d}r$$
$$=\int_{r_1}^{R}\rho\pi\omega^2 r(r^2-r_1^2)\,\mathrm{d}r$$
$$=\int_{0.336}^{0.4}10^3\times\pi\times10^2\times r(r^2-0.336^2)\,\mathrm{d}r$$
$$=124.86\text{N}$$

顶盖受到螺栓组拉力和液压力，由力平衡 $T=F$
$$T=124.86\text{N}$$

小结 求出转动时容器内的压力分布是解题的关键。

●**2—56.** 如图 2—65 所示制动轮内腔直径 $D_1=0.8\text{m}$，高 $H=0.2\text{m}$，上盖开口 $D_2=0.5\text{m}$，当轮绕垂直轴的转速超过规定极限时，内腔的水形成左半部所示的抛物面，液体对制动轮上下盖产生足够的压力差，推轮向下，使轮与刹车带接触而产生制动作用。

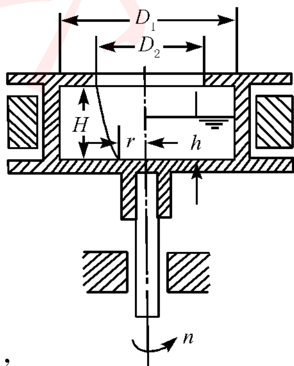


图 2—65

现规定极限转速为 $n=120\text{r/min}$。

试求：(1)自由液面与下盖接触处的半径 r，

(2)液体对上、下盖的压力及向下的压力差，

(3)刹车后，轮内腔中的液位高度 h。

[答：(1)$r=0.194\text{m}$，(2)$F_2-F_1=683.58\text{N}$，(3)$h=0.1374\text{m}$]

分析 由自由液面的方程可求出下盖接触处半径，求出静压强分布，积分可得液压作用力。



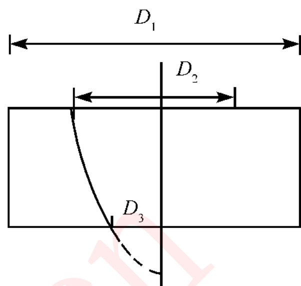


图 2－66

解　(1)由自由液面方程　$z=\dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$

其中　$\omega=\dfrac{\pi}{30}n=4\pi$

当　$r_2=\dfrac{D_2}{2}=0.25\text{m}$ 时

$$z_2=\frac{16\pi^2\times 0.25^2}{2g}=0.502\text{m}$$

$$z_3=z_2-H=0.502-0.2=0.302\text{m}$$

$$r_3=\frac{1}{\omega}\sqrt{2gz_3}=\frac{1}{4\pi}\sqrt{2g\times 0.302}=0.194\ \text{m}$$

(2)静压强分布　$p=p_o+\rho g\left(\dfrac{\omega^2 r^2}{2g}-z\right)$

$$p_2=\rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}-z_2\right)=\frac{\rho\omega^2}{2}(r^2-r_2^2)$$

$$p_3=\frac{\rho\omega^2}{2}(r^2-r_3^2)$$

对上下两底面压力差

$$\Delta F=F_3-F_2=\int_{r_3}^{R}2\pi r p_3\,\mathrm{d}r-\int_{r_2}^{R}2\pi r p_2\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_{r_3}^{R}\pi\rho\omega^2 r(r^2-r_3^2)-\int_{r_2}^{R}\pi\rho\omega^2 r(r^2-r_2^2)\mathrm{d}r$$

$$=\int_{0.194}^{0.4}\pi\times 10^3\times(4\pi)^2 r(r^2-0.194^2)\mathrm{d}r-\int_{0.25}^{0.4}\pi\times 10^3\times(4\pi)^2 r(r^2-0.25^2)\mathrm{d}r$$

$$=683.58\ \text{N}$$

(3)求内腔内的液体体积

$$V=\int_{r_3}^{r_2}2\pi r(z-z_3)\mathrm{d}r+\pi(r_1^2-r_2^2)\cdot H$$

$$=\int_{r_3}^{r_2}\frac{\pi\omega^2}{g}r(r^2-r_3^2)\mathrm{d}r+\pi(r_1^2-r_2^2)H$$

刹车后体积　　$V=\pi r_1^2\cdot h$



则 $$h=\frac{1}{\pi r_1^2}\left[\int_{r_3}^{r_2}\frac{\pi\omega^2}{g}r(r^2-r_3^2)\mathrm{d}r+\pi(r_1^2-r_2^2)H\right]$$

$$r_1=\frac{D_1}{2}=0.8\quad r_2=0.25\quad r_3=0.194$$

代入数据得 $h=0.1374\mathrm{m}$

小结 求压强分布是重要解题思路，本题对自由液面方程进行考查。

◎**2—57.** 在旋转砂型中铸造两个生铁轮子的尺寸如图所示，$D=1\mathrm{m}$，$h=0.2\mathrm{m}$，$b=0.08\mathrm{m}$，$c=0.04\mathrm{m}$，$H=1\mathrm{m}$，$d=0.2\mathrm{m}$，$l=0.5\mathrm{m}$，$n=200\mathrm{r/min}$。生铁相对密度为7.34，不计砂箱及砂的重力，试求上下两组螺栓上的拉力F_A和F_B。(如图2—67)

[答：$F_A=182.5\mathrm{kN}$，$F_B=204.8\mathrm{kN}$]

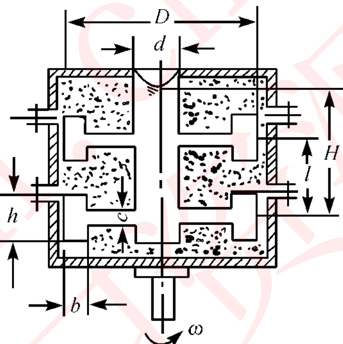


图2—67

分析 按课本公式(2—83)求出容器内的压强分布，积分求得静压力。

解 顶盖中心设为$z=0$ $p=p_0=0$

则 $$p=\rho g\left(\frac{\omega^2r^2}{2g}-z\right)$$

上面生铁轮子顶部压力分为两部分积分$r\in\left(\frac{d}{2},\frac{D}{2}-b\right)$和$r\in\left(\frac{D}{2}-b,\frac{D}{2}\right)$

$$\begin{aligned}F_a&=F_1+F_2\\&=\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}-b}\rho g\left[\frac{\omega^2r^2}{2g}-\left(H-l+\frac{c}{2}\right)\right]\mathrm{d}r+\\&\quad\int_{\frac{D}{2}-b}^{\frac{D}{2}}\rho g\left[\frac{\omega^2r^2}{2g}-\left(H-l+\frac{H}{2}\right)\right]\mathrm{d}r\end{aligned}$$

代入数据，其中 $\omega=\frac{\pi}{30}n=\frac{\pi}{30}200=\frac{20}{3}\pi$



$$\rho=7.34\times10^3\text{kg/m}^3$$

积分求得　　　　$F_a=182.5\text{kN}$

对顶盖作力的平衡，螺栓拉力　$F_A=F$

∴　　　　$F_A=182.5\text{kN}$

对两组螺栓之间的砂箱部分（包括砂）受力分析。

分别受到两组螺栓作用力 F_A 和 F_B 以及砂子的浮力 F

由于平衡　　　　$F_B=F_A+F$

$$F_B=F_A+\rho gV=F_A+\rho g\left\{\pi\left[\left(\frac{D}{2}-b\right)^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\cdot(l-c)+\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2-\left(\frac{D}{2}-b\right)^2\right](l-h)\right\}$$

代入数据

$$\rho=7.34\times10^3\text{kg/m}^3,F_A=182.5\times10^3\text{N}$$

求得　　　　$F_B=204.8\text{kN}$

◎**2－58.** 试确定图示装置所能平衡的轴向力 F，已知轴的转速 $n=3\ 000\text{r/min}$，旋转活塞直径 $D=0.32\text{m}$，轴径 $d=0.05\text{m}$，在距轴 $a=0.07\text{m}$ 处供水的计示压强 $p=10^6\text{Pa}$，水的转速为轴转速的一半。（如图 2－68）

[答：$F=86.4\text{kN}$]

分析　先计算水的静压强分布规律，然后积分求得压力。

解　如图 2－69 建立坐标系

$$f_x=-g+\omega^2r\cos\theta=-g+\omega^2x$$

$$f_y=\omega^2r\sin\theta=\omega^2y$$

代入等压面方程　$f_x\text{d}x+f_y\text{d}y=0$

得　$$-gx+\frac{\omega^2}{2}x^2+\frac{\omega^2}{2}y^2=C$$

代入压强微分公式

$$\text{d}p=\rho[(-g+\omega^2x)\text{d}x+\omega^2y\text{d}y]$$

得　$$p=\rho g\left(-x+\frac{\omega^2}{2g}x^2+\frac{\omega^2}{2g}y^2\right)+C$$

当 $r=a$　$x=-a$ 时 $p=10^6p_a$

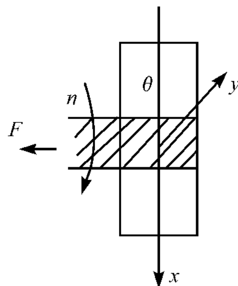


图 2－69

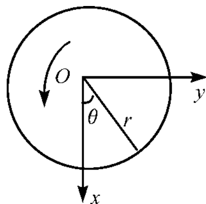


图 2－70

解得　　$C=10^6-\rho g\left(a+\frac{\omega^2}{2g}a^2\right)$

转换为柱坐标

$$p=\rho g\left(-r\cos\theta+\frac{\omega^2}{2g}r^2\right)+10^6-\rho g\left(a+\frac{\omega^2}{2g}a^2\right)$$

$$F=\int_{d/2}^{D/d}\int_0^{2\pi}2\pi r\cdot p\mathrm{d}r$$

$$=\int_{0.025}^{0.16}\int_0^{2\pi}2\pi r\left[\rho g\left(-r\cos\theta+\frac{\omega^2}{2g}r^2\right)+10^6-\rho g\left(a+\frac{\omega^2}{2g}a^2\right)\right]\mathrm{d}r$$

其中　　$\omega=\frac{\pi}{30}n=\frac{\pi}{30}\times3000\times\frac{1}{2}=50\pi$

代入数据积分得　$F=86.4\times10^3\,\mathrm{N}=86.4\mathrm{kN}$

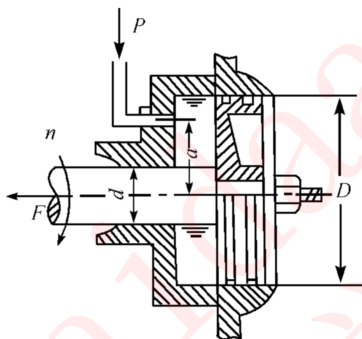


图 2－68

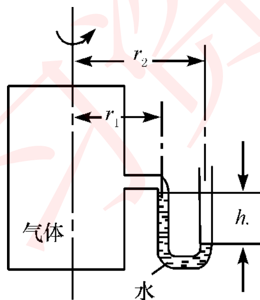


图 2－71

●**2－59.** 如图 2－71 所示的真空容器上，水柱 U 形管中 $h=1\mathrm{m}$，$r_1=1\mathrm{m}$，$r_2=1.1\mathrm{m}$，试求下列八种情况下容器中的真空度 p。

(1)容器固定；

(2)容器以$\frac{g}{2}$的加速度向上运动；

(3)容器以$\frac{g}{2}$的加速度向下运动；

(4)容器以$\frac{g}{2}$的加速度向左运动；

(5)容器以$\frac{g}{2}$的加速度向右运动；



(6)容器绕其中心轴以 $\omega=1s^{-1}$ 的角速度旋转，$h=1m$；

(7)容器绕其中心轴以 $\omega=1s^{-1}$ 的角速度旋转，$h=0$；

(8)容器绕其中心轴以 $\omega=1s^{-1}$ 的角速度旋转，液柱右高左低，但其差值仍为 $h=1m$。

[答：(1)9.81kPa；(2)14.715kPa；(3)4.905kPa；(4)10.3kPa；(5)9.32kPa；(6)9.915kPa；(7)0.105kPa；(8)9.705kPa。以上数值均为真空度]

分析　掌握基本公式 $p=\rho gh$，考虑加速运动、旋转对水柱的影响。

解　(1)容器固定

真空度

$$p_1=\rho gh=10^3\times9.81\times1=9.81\times10^3\,Pa=9.81kPa$$

(2)当以 $\frac{g}{2}$ 加速向上运动　$g'=g+\frac{g}{2}=\frac{3}{2}g$

$$p_2=\rho g'h=10^3\times9.81\times\frac{3}{2}\times1=1.4715\times10^4\,Pa$$

$$=14.715kPa$$

(3)当以 $\frac{g}{2}$ 加速向下运动　$g'=g-\frac{g}{2}=\frac{1}{2}g$

$$p_3=\rho g'h=10^3\times9.81\times\frac{1}{2}\times1$$

$$=4.905\times10^3\,Pa=4.905kPa$$

(4)当以 $\frac{g}{2}$ 加速向左运动时，容器内的压强除了 h 高水柱之外，还包括水平段水柱所产生压强.

$$p=\rho gh+\rho a(r_2-r_1)=\rho gh+\rho\frac{g}{2}(r_2-r_1)$$

$$=10^3\times9.81\times1+10^3\times9.81\times\frac{1}{2}\times0.1$$

$$=1.03\times10^4\,Pa=10.3kPa$$

(5)分析同(4)

$$p=\rho gh+\rho\left(-\frac{g}{2}\right)(r_2-r_1)$$

$=10^3\times9.81\times1+10^3\times(-9.81\times\frac{1}{2})\times0.1$

$=9.32\times10^3\text{Pa}=9.32\text{kPa}$

(6)先计算以 ω 绕轴转动所产生的液柱高

$\Delta h=h_2-h_1=\frac{\omega^2}{2g}(r_2^2-r_1^2)=0.0107\text{m}$

容器压强有 Δh 液柱产生旋转向心力,($p-\Delta h$ 液柱)压强由压差管显示出来。即 h 是补偿向心力后的值

$p=\rho gh'=\rho g(h+\Delta h)$

$=10^3\times9.81\times(1+0.0107)$

$=9.915\times10^3\text{Pa}=9.915\text{kPa}$

(7)分析同上,$h=0$

$p=\rho g\Delta h=10^3\times9.81\times0.0107$

$=1.05\times10^2\text{Pa}=0.105\text{kPa}$

(8)分析同上但 h 方向相反

$h'=-h+\Delta h$

$p=\rho g(-h+\Delta h)$

$=10^3\times9.81\times(-1+0.0107)$

$=-9.705\times10^3\text{Pa}<0$

此时容器内为正压 $p=-p=9.705\times10^3\text{Pa}=9.705\text{kPa}$

小结 本题是运动容器中压强求解问题,请注意本题中各种情况的不同之处。

第三章

流体动力学基础

内容提要

一、描述流体运动的两种方法

研究液体的运动可以用拉格朗日法和欧拉法。

1. 拉格朗日法

拉格朗日(Lagrange)法是将整个流体运动当成许多流体质点运动的总和来进行考虑的。用这一方法时，应该考察每一质点在运动过程中的轨迹、速度、加速度及其相应的密度、重度、动压强等等，然后凭这些资料的总和来了解整个流体的运动，因此，它实际上是用理论力学中质点系动力学的方法来研究流体运动的。

表 3－1　用拉格朗日法描述流体运动的表达式

质点运动坐标	质点速度	质点加速度
$x=x(a,b,c,t)$	$v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x(a,b,c,t)$	$a_x=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=a_x(a,b,c,t)$
$y=y(a,b,c,t)$	$v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y(a,b,c,t)$	$a_y=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=a_x(a,b,c,t)$
$z=z(a,b,c,t)$	$v_z=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_z(a,b,c,t)$	$a_z=\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=a_z(a,b,c,t)$

2. 欧拉方法

欧拉(Euler)方法是将经过某一流动空间的流体运动，当成不同质点在不同时刻经过这些空间位置时的运动总和来考虑的。用这种方法研究流体运动时，并不关心个别流体质点的运动，只需要仔细观察经过空间每一个位置处的流体运动情况。

速度 v 在各轴上的投影可表示为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= F_1(x,y,z,t) \\ v_y &= F_2(x,y,z,t) \\ v_z &= F_3(x,y,z,t) \end{aligned}\right\} \tag{3-1}$$

x、y、z 和 t 称为欧拉变数。运动质点的加速度投影可表示为

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F_1(x,y,z,t)}{\mathrm{d}t} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F_2(x,y,z,t)}{\mathrm{d}t} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F_3(x,y,z,t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

二、流体运动中的几个基本概念

1. 物理量的质点导数

对物理量 N 质点导数又可写成

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = v_x\frac{\partial N}{\partial x} + v_y\frac{\partial N}{\partial y} + v_z\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} \tag{3-3}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)N + \frac{\partial N}{\partial t}。 \tag{3-4}$$

2. 迹线与流线

(1) 迹线

迹线正是流体质点 M 的运动轨迹，或者说，它所表征的正是某一质点 M 在一段时间内的运动情况。

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z} = \mathrm{d}t \tag{3-5}$$



上式为迹线的微分方程，表示质点 M 轨迹。

（2）流线

如果某一瞬间在流场中作出一条曲线，使这一瞬间所有处在这条曲线上的流体质点的速度矢量都和它相切，符合这样条件的曲线称为流线。

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{dz}{v_z} \tag{3-6}$$

上式为流线的微分方程。

3. 流管与流束

在流场内作一本身不是流线又不相交的封闭曲线，通过这样的封闭曲线上各点的流线所构成的管状表面称为流管。流管内部的流体称为流束。流束可大可小，如果封闭曲线取得极小，甚至缩为一点，则极限近于一条流线的流束叫作微元流束。

4. 流量与净通量

（1）流量

单位时间内流过某一控制面的流体体积称为该控制面的流量 q_V。流量不是矢量，它的单位是 m^3/s 或 1/min。如果单位时间内

$$q_V=\iint_A v\,dA$$

式中 dA 为微元面积，v 是有效截面上各点的速度，积分是对有效截面的面积分。计算流经任意曲面的流量时，由于速度并不与截面相垂直，所以必须将速度在截面的法线方向上的分量乘以微元面积，而后积分，即

$$q_V=\iint_A v\,dA\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) \tag{3-7}$$

或中，$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})$ 是速度矢量与法线方向的夹角余弦。

（2）净通量

流过全部封闭控制面 A 的流量称为净流量（或净通量）用 q_V 表示，则

$$q_V = \oiint_A v\mathrm{d}A\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) = \oiint_A v \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oiint_A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3-8}$$

5. 过流断面上的平均速度与动能、动量修正系数

(1) 平均速度

$$\bar{v} = \frac{q_V}{A} \tag{3-9}$$

(2) 动能修正系数

$$\alpha = \frac{\int_A \mathrm{d}q_m \frac{v^2}{2}}{\frac{\rho}{2}\bar{v}^3 A} = \frac{\int_A v^3 \mathrm{d}A}{\bar{v}^3 A} = 1 + \frac{3}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A > 1 \tag{3-10}$$

(3) 动量修正系数

$$\beta = \frac{\int_A \mathrm{d}q_m v}{\rho\bar{v}^2 A} = \frac{\int_A v^2 \mathrm{d}A}{\bar{v}^2 A} = 1 + \frac{1}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A > 1 \tag{3-11}$$

α 与 β 均与过流断面上的速度分布有关，速度分布越均匀则修正系数越小。

三、连续方程式

前面已经提到，在一般的工程流体力学中把流体视为连续介质。换言之，在流场内流体质点连续地充满整个空间。在流动过程中，流体质点必须互相衔接，不出现空隙。这样，根据质量守恒定律可以导出流动的连续方程。

$$\oiint_A \rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\mathrm{d}V = 0 \tag{3-11}$$

1. 对一元流动

如果流体密度是常数，即流体是不可压缩的

$$vA = 常数$$

即不可压缩流体沿流管的体积量是常量。



2. **对二元、三元流动**

直角坐标系 $$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad (3-12)$$

[**特例** 1] 定常流动简化为

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \qquad (3-13)$$

[**特例** 2] 不可压缩流动时简化为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (3-14)$$

圆柱坐标系

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{r\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\rho v_r}{r}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad (3-15)$$

[**特例** 1] 定常流动时简化为

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{r\partial \theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\rho v_r}{r}=0 \qquad (3-16)$$

[**特例** 2] 不可压缩流动时简化为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0 \qquad (3-17)$$

四、流体微元的运动分析

1. **亥姆霍兹速度分解定理**

$$\left.\begin{aligned}
v'_x &= v_x+\theta_{xx}\mathrm{d}x+\varepsilon_{xy}\mathrm{d}y+\varepsilon_{xz}\mathrm{d}z+w_y\mathrm{d}z-\omega_z\mathrm{d}y\\
v'_y &= v_y+\theta_{yy}\mathrm{d}y+\varepsilon_{yz}\mathrm{d}z+\varepsilon_{yx}\mathrm{d}x+w_z\mathrm{d}x-\omega_x\mathrm{d}z\\
v'_z &= v_z+\theta_{zz}\mathrm{d}z+\varepsilon_{zx}\mathrm{d}x+\varepsilon_{zy}\mathrm{d}y+w_x\mathrm{d}y-\omega_y\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \qquad (3-18)$$

2. **流体微元运动的三种形式**

(1) 平移运动；

(2) 直线变形运动；

(3) 旋转运动与剪切变形运动。

表 3－2

$\left.\begin{aligned}\theta_{xx}&=\frac{\partial v_x}{\partial x}\\ \theta_{yy}&=\frac{\partial v_y}{\partial y}\\ \theta_{zz}&=\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\\ \varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}$

五、实际流体的运动微分方程式

1. 本构方程

本构方程是剪切应力与剪切应变速度的关系式，实际上它也就是牛顿流体的牛顿内摩擦定律在空间三元运动情况下的推广。

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}=2\mu\varepsilon_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=2\mu\varepsilon_{yz}&=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=2\mu\varepsilon_{zx}&=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3-19)$$

2. 纳维 — 斯托克斯方程($N-S$ 方程)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+v\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)\\ \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}&=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+v\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\\ \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+v\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3-20)$$

这就是不可压缩粘性流体的运动微分方程。

六、伯努利方程式及其应用

伯努利方程推导方式很多，可由能量方程和连续方程推导。

对于单位重力的流体，可把伯努利方程写成

$$\frac{v^2}{2g}+z+\frac{p}{\rho g}=H\qquad(3-21)$$



式中各项的量纲均为长度，第一项 $v^2/2g$ 称为速度水头（动压头），后二项是位置水头和压强水头之和，三项之和称为总水头（H）。伯努利方程可表述为：不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的速度水头、位置水头与压强水头之和为常数，即总水头线为一平行于基准线的水平线。

伯努利方程的应用条件是理想不可压缩流体在重力场中的定常流动。

2. **伯努利方程应用**

（1）皮托管

皮托(Pitot)管是将流体动能转化为压能、从而通过测压计测定流体运动速度的仪器。

（2）节流式流量计

利用节流元件前后的压强差来测定流量。

七、动量方程式

动量方程即为质点系的动量定理

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{V} + \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}) \qquad (3-22)$$

对定常不可压缩流

$$\begin{cases} \sum F_x = \rho Q(\beta_2 v_{2x} - \beta_1 v_{1x}) \\ \sum F_y = \rho Q(\beta_2 v_{2y} - \beta_1 v_{1y}) \\ \sum F_z = \rho Q(\beta_2 v_{2z} - \beta_1 v_{1z}) \end{cases} \qquad (3-23)$$

式中　F_x, F_y, F_z——作用在计算流段上的所有外力的合力在 x, y, z 轴方向的分量；

$v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}$——计算流段的进出口断面上的断面平均流速在 x, y, z 方向上的分量；

β_1, β_2——进出口断面处的动能修正系数，当已知断面上的点流速 v 的分布规律时，可按 $\beta = \dfrac{\int_A v^2 \mathrm{d}A}{\bar{v}^2 A}$ 求得，其数值一般在 1.01～

1.05 之间。

八、总流的动量矩方程

动量矩方程表述为:作用于控制体积上的合外力矩等于控制体内动量矩的变化率。

$$\begin{cases} M_x = \iint\limits_A (yv_x - zv_y)\rho v_n \mathrm{d}S \\ M_y = \iint\limits_A (zv_x - xv_z)\rho v_n \mathrm{d}S \\ M_z = \iint\limits_A (xv_y - yv_z)\rho v_n \mathrm{d}S \end{cases} \tag{3-24}$$

式中 M_x,M_y,M_z 为外力对 x,y,z 轴的力矩,$\mathrm{d}S$ 为面元。



典型例题与解题技巧

【例 1】 已知流场速度分布为

$$u = yzt, \quad v = xzt, \quad w = 0$$

试求 $t = 0.5$ 时空间点(2,5,3)处的流体质点的加速度。

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = yz + xz^2t^2 = 27.5$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = xz + yz^2t^2 = 28.75$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 39.78$$

【例 2】 已知 $u = x + t$,$v = -y + t$,$w = 0$,求 $t = 0$ 时通过 $x = -1$,$y = 1$,$z = 1$ 点的流线。

解题分析 利用式(3-6)求流线方程,即$\dfrac{\mathrm{d}x}{v_x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{v_y} = \dfrac{\mathrm{d}z}{v_z}$。

解题过程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x+t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{-y+t} = \dfrac{\mathrm{d}z}{0}$

$\mathrm{d}z = 0$,$z = c_1$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{x+t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{-y+t}$, $\quad (x+t)(t-y) = c_2$

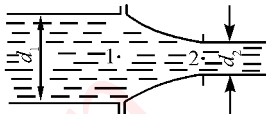


由 $t=0, x=-1, y=1, z=1$ 得到

$c_1=1, c_2=1$

$t=0$ 时，过该点的流线方程：$xy=-1, z=1$

【例 3】 见图 3－1，求喷嘴对管子的作用力，忽略摩擦，流体是油，相对密度是 0.85，截面 1 上的计示压强为 $p_1=7\times10^5\,\mathrm{Pa}$，$d_1=10\mathrm{cm}$，$d_z=4\mathrm{cm}$。



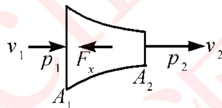


图 3－1

解题分析　本题考查流体的动量方程由(3－23)计算。

$$\begin{cases}\sum F_x=\rho Q(\beta_2 v_{2x}-\beta_1 v_{1x})\\ \sum F_y=\rho Q(\beta_2 v_{2y}-\beta_1 v_{1y})\\ \sum F_z=\rho Q(\beta_2 v_{2z}-\beta_1 v_{1z})\end{cases}$$

解题过程　喷嘴出口截面 2 上的计示压强 $p_2=0$，F_x 表示喷嘴壁面作用在喷嘴内流体上的总力，A 表示截面积，不计重力，根据动量方程有：

$$\rho A_2 v_2^2-\rho A_1 v_1^2=p_1 A_1-F_x \tag{①}$$

应用伯努利程于喷嘴两端截面上的 1、2 两点，由于位标 $z_1=z_2, p_2=0$，故有

$$\frac{v_2^2}{2}=\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho} \tag{②}$$

又应用连续方程

$$v_1 A_1=v_2 A_2 \tag{③}$$

求解式②③，得

$$v_2=\sqrt{\frac{2p_1}{\rho\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right]}}=\sqrt{\frac{2\times7\times10^5}{0.85\times10^3\left[1-\left(\frac{0.04}{0.1}\right)^4\right]}}$$

$$=41.1\mathrm{m/s}$$

$$v_1=\frac{A_2}{A_1}v_2=\left(\frac{0.04}{0.1}\right)^2\times41.1=6.58\mathrm{m/s}$$

代入式①得

$$F_x = p_1A_1 + \rho A_1(v_1^2 - \frac{A_2}{A_1}v_2{}^2)$$

$$= 7\times10^5\times\frac{\pi}{4}\times0.1^2 + 0.85\times10^3\times\frac{\pi}{4}$$

$$\times0.1^2[6.58^2 - (\frac{0.04}{0.1})^2\times41.1^2] = 398\ 2\text{N}$$

喷嘴对管子的作用力与 F_x 大小相等方向相反。

【例 4】 验证下列速度分布满足不可压缩流体的连续性方程：

(1)$u = -(2xy + x), v = y^2 + y - x^2$

(2)$v_r = 2r\cos2\theta + \frac{1}{r}, v_\theta = -2r\sin2\theta$

(3)$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{y}{x^2 + y^2}$

解题分析 将速度方程代入连续性方程验证。

解题过程 (1) $\frac{\partial u}{\partial x} = -(2y + 1),$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(2) $\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(2r^2\cos2\theta + 1) = 4r\cos2\theta$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -4r\cos2\theta$$

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

(3) 从速度分布的表达式看出，用极坐标比较方便。当然，使用直角坐标也可以进行有关计算，但求导过程较为复杂。

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos\theta}{r}, v = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\sin\theta}{r}$$

$$v_r = u\cos\theta + v\sin\theta = \frac{1}{r}$$



$$v_\theta = -u\sin\theta + v\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

历年考研真题评析

【题 1】 （东南大学 2005 年）已知不可压缩流体运动的速度场为：

$v_x = x - 4y, v_y = -y - 4y, v_z = 0$。

求流线方程。问此流动是否连续？

解题分析　利用方程(3－6)求流线用连续方程验证。

解题过程　(1) 求流线方程

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y},$$

即 $$\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y} = \frac{4y - x}{y + 4x} = \frac{4 - x/y}{1 + 4x/y}。$$

令 $x = uy$，则 $dx = ydu + udy$。故有：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ydu}{du} + u = \frac{4 - u}{1 + 4u},$$

$$\frac{dy}{y} = -\left(\frac{du + 4udu}{4u^2 + 2u - 4}\right),$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{4u^2 + 2u - 4}}。$$

换回原变量，经整理后即可得流线方程式：

$2x^2 + xy - 2y^2 = \text{Const}$。

(2) 检验连续性

对给定的流动，其连续方程为：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0。$$

由已知条件可得：

$\partial v_x/\partial x = 1$，　$\partial v_y/\partial y = -1$，　$\partial v_z/\partial z = 0$。

将上述各值代入连续方程，可见有：

$1 - 1 + 0 = 0$

此结果表明连续方程能被满足，故知流动是连续的。

【题 2】 （西南交通大学 2006 年）图 3－2 为一水力旋流器，入口处为矩形过水断面，其面积为 $A_2 = 100\text{mm} \times 20\text{mm}$，供矿管为圆形水管，其面积 $A_1 = \dfrac{\pi \times 0.1^2}{4}\text{m}^2$，问当入口流速成为 $v_2 = 12\text{m/s}$ 时，供矿管中矿浆的流速为多少？

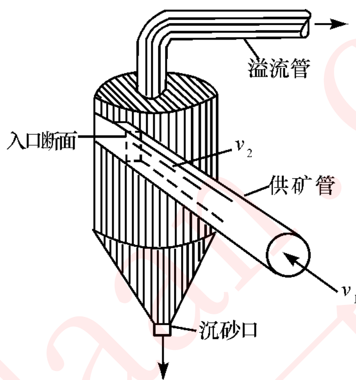


图 3－2　水力旋流器

解题分析　可直接利用连接方程计算任意断面流速。

解题过程　根据连续性方程

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

列出等式

$$(0.1 \times 0.02) \times 12 = \frac{\pi \times 0.1^2}{4} \times v_1$$

故

$$v_1 = \frac{0.1 \times 0.02 \times 12}{\pi \times 0.1^2} \times 4 = 3.06\text{m/s}$$

【题 3】 （武汉大学 2006 年）离心式通风机借集流器 A 从大气汲取空气，如图 3－3 所示，在直径 $d = 200\text{mm}$ 的圆柱形管道部分接一根下端插入盛水容器的玻璃管，若玻璃管中的水上升 $H = 150\text{mm}$，已知空气的密度 $\rho_{气} = 1.29\text{kg/m}^3$，试求通风机流量 Q。



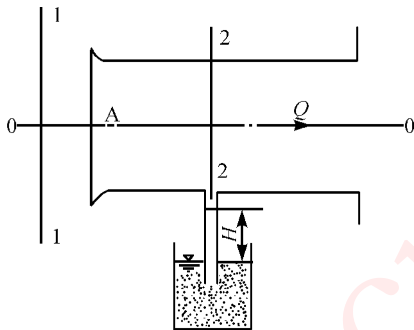


图 3－3

解题分析　本题可利用伯努利方程先求出截面 2－2 的状态参考再求流量。

解题过程　取管轴为 0－0 基准面，对 1－1，2－2 断面建立总流的能量方程：

$$0+0+0=0+\frac{p}{\gamma_{气}}+\frac{av^2}{2g}+0$$

或者，p 可根据盛水容器静力学基本方程求得：

$$p+\gamma_{水}H=0$$

取 $a=1.0$ 得

$$v=\sqrt{2g\frac{\gamma_{水}}{\gamma_{气}}H}$$

$$Q=Av=\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g\frac{\gamma_{水}}{\gamma_{气}}H}$$

$$=\frac{3.14\times 0.2^2}{4}\sqrt{2\times 9.8\times\frac{1000}{1.29}\times 0.15}$$

$$=1.5\mathrm{m^3/s}$$



课后习题全解

◎ **3－1.** 二元、定常的逆时针转动流动中，已知 P 点（$r=2\mathrm{m}$，$\theta=60°$）的切线速度为 $v=1.04\mathrm{m/s}$，试求该点在 x，y 方向上的速度和加速度分量。（如图 3－4）

[答：$v_x=-0.9\text{m/s}, v_y=0.52\text{m/s}$，
$a_x=-0.27\text{m/s}^2, a_y=-0.47\text{m/s}^2$]

分析　对圆周运动，向心加速度 $a=\dfrac{v^2}{r}$。

解　对速度进行分解

$$v_x=v\cdot\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=1.04\times\cos150^\circ=-0.9\text{m/s}$$

$$v_y=v\cdot\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=1.04\times\sin150^\circ=0.52\text{m/s}$$

向心加速度　$a=\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{1.04^2}{2}=0.54\text{m/s}^2$

$$a_x=a\cos(\pi+\theta)=0.54\times\cos240^\circ=-0.27\text{m/s}^2$$

$$a_y=a\sin(\pi+\theta)=0.54\times\sin240^\circ=-0.47\text{m/s}^2$$

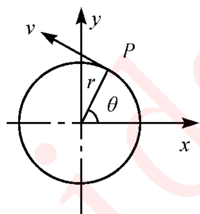


图 3－4

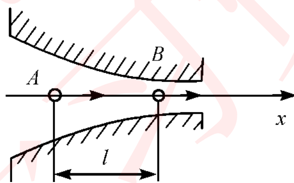


图 3－5

◎ **3－2.** 二元不可压缩流场中

$$v_x=5x^3, v_y=-5x^2y$$

试求($x=1\text{m}, y=2\text{m}$)点上的速度和加速度。

[答：$v=30.41\text{m/s}, a=167.7\text{m/s}^2$]

分析　加速度定义 $\bar{a}=\dfrac{d\bar{v}}{dt}$　$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$。

解　将($x=1, y=2$)，代入速度计算式

$$v_x=5\times1^3=5\text{m/s}, v_y=-15\times1^2\times2=-30\text{m/s}$$

$$\therefore\ v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{5^2+(-30)^2}=30.41\text{m/s}$$

$$a_x=v_x\frac{dv_x}{dx}+v_y\frac{dv_x}{dy}=5x^3\cdot15x^2=75x^5=75\text{m/s}^2$$



$$a_y = v_x \frac{dv_y}{dx} + v_y \frac{dv_y}{dy} = 5x^3 \cdot (-30xy) + (-15x^2 y)(-15x^2)$$

$$= -300 + 450 = 150\text{m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{75^2 + 150^2} = 167.7\text{m/s}^2$$

◎ **3－3.** 流体质点速度沿 x 方向成线性规律变化，已知相距 $l = 50\text{cm}$ 两点的速度为 $v_A = 2\text{m/s}$，$v_B = 6\text{m/s}$。流动是定常的，试求 A、B 两点的质点加速度。(如图 3－5)

[答：$a_A = 16\text{m/s}^2$，$a_B = 48\text{m/s}^2$]

分析　由题可设质点沿 x 方向速度 $v = bx + c$，$a = v\dfrac{dv}{dx} = bv$。

解　分别将 v_A，v_B 代入方程则

$$v_A - v_B = b(x_A - x_B) = -bl$$

即
$$lb = 0.5b = v_B - v_A = 4$$

$$b = 8$$

$$a_A = bv_A = 16\text{m/s}^2 \quad a_B = bv_B = 48\text{m/s}^2$$

◎3－4. 已知流场的速度为

$$v_x = 2kx \quad v_y = 2ky \quad v_z = -4kz$$

式中 k 为常数，试求通过(1,0,1)点的流线方程。

[答：$y = 0$，$z = \dfrac{1}{x^2}$]

分析　先判断是否连续流线方程　$\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y} = \dfrac{dz}{v_z}$。

解　连续方程　$\dfrac{dv_x}{dx} + \dfrac{dv_y}{dy} + \dfrac{dv_z}{dz} = 0$　①

将速度表达式 v_x，v_y，v_z 代入 ① 式成立，故连续

由流线方程 $\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dz}{v_z}$　得

$$\frac{dx}{2kx} = \frac{dz}{-4kz} \quad \text{即得 } z = \frac{1}{x^2} + C_1$$

由 $\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y}$ 得

$$\frac{dx}{2kx}=\frac{dy}{2ky} \quad 即得\ y=x+C_2$$

过(1,0,1)点流线为$\begin{cases} y=0 \\ z=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

◎ **3－5.** 已知流场的速度为 $v_x=1+At$，$v_y=2x$，试确定 $t=t_0$ 时通过(x_0,y_0)点的流线方程。A 为常数。

[答：$y-y_0=\dfrac{1}{1+At_0}(x^2-x_0^2)$]

分析　流线方程　$\dfrac{dx}{v_x}=\dfrac{dy}{v_y}$。

解　将 v_x、v_y 代入流线方程得　$\dfrac{dx}{1+At}=\dfrac{dy}{2x}$

积分得　$y=\dfrac{1}{(1+At)}x^2+C$

当 $t=t_0$ 时(x_0,y_0)坐标代入

解得　$C=y_0-\dfrac{1}{(1+At_0)}x_0^2$

∴ 过(x_0,y_0)流线方程为　$y-y_0=\dfrac{1}{1+At_0}(x^2-x_0^2)$

3－6. 大管直径 $d_1=5\text{m}$，小管直径 $d_2=1\text{m}$，已知大管中过流断面上的速度分布为 $v=6.25-r^2\ \text{m/s}$(式中 r 表示点所在半径、以 m 计)。(如图 3－6)

试求管中流量及小管中的平均速度。

[答：$q_V=61.36\text{m}^3/\text{s}$，$v=78.13\text{m/s}$]

分析　由连续方程，大小管内流量应相等 $q_1=q_2$。

解　积分求大管的流量

$$q_1=\int_0^{d_1/2}2\pi r\cdot v\,dr$$

$$=\int_0^{d_1/2}2\pi r(6.25-r^2)dr$$

$$=2\pi\int_0^{2.5}(6.25r-r^3)dr$$

$$=61.36\ \text{m}^3/\text{s}$$

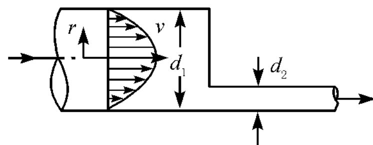


图 3－6



$$q_2 = q_1 = 61.36\text{m}^3/\text{s}$$

小管裁面积　$A_2 = \frac{1}{4}\pi d_2^2 = \frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$

平均速度　$\overline{v_2} = \frac{q_2}{A_2} = \frac{61.36}{\frac{\pi}{4}} = 78.13\text{m/s}$

◎ **3－7.** 四冲程六缸汽油发动机进气管路如图 3－7 所示，试求进入发动机的空气质量流量 q_m 及进气管、喉部、气门处的气流速度 v_1、v_2、v_3。已知条件如下：

环境大气压 $p = 101\ 300\text{Pa}$，环境气温 $t = 20℃$，进气管直径 $d_1 = 6\text{cm}$，喉部直径 $d_2 = 3\text{cm}$，气门直径 $d_3 = 2.5\text{cm}$，气门杆直径 $d_4 = 0.8\text{cm}$，气缸直径 $D = 10\text{cm}$，活塞冲程 $s = 12\text{cm}$，发动机曲轴转速 $n = 2\ 500\text{r/min}$，由于进排气重叠，实际进气量与理论容积之比称为充气系数，充气系数 $\eta_V = 0.8$，四冲程发动机每两转，六缸各吸气一次，据此计算理论容积。

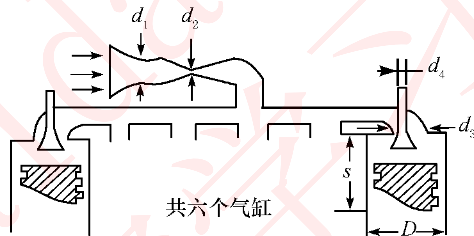


图 3－7

[答：$q_m = 0.11\text{kg/s}$、$v_1 = 33.3\text{m/s}$、$v_2 = 133.3\text{m/s}$、$v_3 = 35.6\text{m/s}$]

分析　先确定汽油机的排气量，由连续方程，$q_1 = q_2 = 6q_3 = 6q_4 = q = 6q'$。

解　由题一个气缸进气排气量

$$q' = \frac{n}{60} \times \frac{1}{2} \times \eta_V \times \frac{1}{4}\pi D^2 \times s$$

$$= \frac{2500}{60} \times \frac{1}{2} \times 0.8 \times \frac{1}{4} \times \pi \times 0.1^2 \times 0.12$$

$$= 0.0157\text{m}^3/\text{s}$$

总气量 $q = 6q' = 0.0942\text{m}^3/\text{s}$

在 101300Pa、20℃ 时空气密度　　$\rho = 1.205\text{kg/m}^3$

∴　　$q = 0.0942\text{m}^3/\text{s} = 0.11\text{kg/s}$

$$v_1 = \frac{q_1}{A_1} = \frac{q}{A_1} = \frac{q}{\frac{1}{4}\pi d_1^2} = \frac{0.942}{\frac{1}{4}\times\pi\times 0.06^2} = 33.3\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{q_2}{A_2} = \frac{q}{A_2} = \frac{q}{\frac{1}{4}\pi d_2^2} = \frac{0.942}{\frac{1}{4}\times\pi\times 0.03^2} = 133.3\text{m/s}$$

$$v_3 = \frac{q_3}{A_3} = \frac{q'}{A_3} = \frac{q'}{\frac{1}{4}\pi(d_3^2 - d_4^2)}$$

$$= \frac{0.0157}{\frac{1}{4}\times\pi\times(0.025^2 - 0.008^2)}$$

$$= 35.6\text{m/s}$$

◎3－8. 管路 AB 在 B 点分为 BC、BD 两支，已知 $d_A = 45\text{cm}$，$d_B = 30\text{cm}$，$d_C = 20\text{cm}$，$d_D = 15\text{cm}$，$v_A = 2\text{m/s}$，$v_C = 4\text{m/s}$。(如图 3－8)

试求 v_B、v_D。

[答：$v_B = 4.5\text{m/s}$，$v_D = 10.88\text{m/s}$]

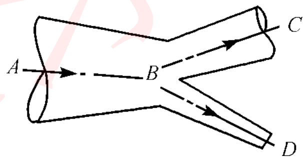


图 3－8

分析　由连续方程 $q_A = q_B = q_C + q_D$。

解　$q_A = \frac{1}{4}\pi d_A^2 \cdot v_A = \frac{1}{4}\pi\times 0.45^2\times 2 = 0.318\text{m}^3/\text{s}$

$$v_B = \frac{q_B}{\frac{1}{4}\pi d_B^2} = \frac{q_A}{\frac{1}{4}\pi d_B^2} = \frac{0.318}{\frac{1}{4}\pi\times 0.3^2} = 4.5\text{m/s}$$

$$q_C = \frac{1}{4}\pi d_C^2 \cdot v_C = \frac{1}{4}\times\pi\times 0.2^2\times 4 = 0.1257\text{m}^3/\text{s}$$

$$q_D = q_A - q_C = 0.1923\text{m}^3/\text{s}$$

$$v_D = \frac{q_D}{\frac{1}{4}\pi d_D^2} = \frac{0.1923}{\frac{1}{4}\pi\times 0.15^2} = 10.88\text{m/s}$$



◎ **3－9.** 以平均速度 $v=0.15\text{m/s}$ 流入直径为 $D=2\text{cm}$ 的排孔管中的液体，全部经 8 个直径 $d=1\text{mm}$ 的排孔流出，假定每孔出流速度依次降低 2%，试求第一孔与第八孔的出流速度各为多少?（如图 3－9）

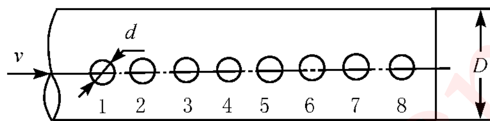


图 3－9

[答：$v_1=8.04\text{m/s}$，$v_8=6.98\text{m/s}$]

分析　由连续方程，总流量 q 等于 8 个小孔流量 q_i 之和。

解　设第 1 孔流速为 v_1 第 2—8 孔流速为 v_2-v_8

由已知条件假定 $\dfrac{v_{i+1}}{v_i}=(1-2\%)=0.98$　（其中 $i=1\sim7$）

总流量　$q=\dfrac{1}{4}\pi D^2\cdot v=\dfrac{1}{4}\times\pi\times0.02^2\times0.15$

$=4.71\times10^{-5}\text{m}^3/\text{s}$

8 个小孔的面积　$A=\dfrac{1}{4}\pi d^2=7.854\times10^{-7}\text{m}^2$

$$q=Av_1+Av_2+\cdots+Av_8=A(v_1+v_2+\cdots+v_8)$$
$$=Av_1(1+0.98+0.98^2+\cdots+0.98^7)$$
$$=Av_1\frac{1-0.98^8}{1-0.98}$$

代入 q 和 A 的值得　$v_1=8.04\text{m/s}$

$$v_8=v_1\cdot0.98^7=6.98\text{m/s}$$

◎ **3－10.** 平行平板间 AA 断面上的速度分布为

$$v=\frac{10}{a}\left(y-\frac{2y^2}{a}\right)$$

a 为断面高度，垂直于纸面宽度为 1 单位。试求断面上的流量和平均速度。（如图 3－10）

[答：$q_V=-\dfrac{5}{3}a$ 单位，$v=-\dfrac{5}{3}$ 单位，方向向左]

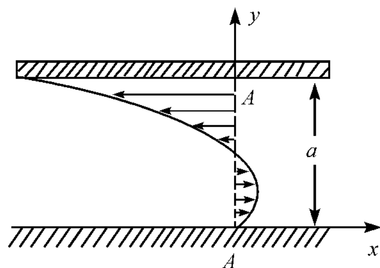


图 3－10

分析　流量可通过积分求得　$q=\int_0^a v\mathrm{d}y$。

解　流量　$$q=\int_0^a v\mathrm{d}y=\int_0^a \frac{10}{a}(y-\frac{2y^2}{a})\mathrm{d}y$$

$$=\frac{10}{a}(\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3a}a^3)=-\frac{5}{3}a$$

平均速度　$$\bar{v}=\frac{q}{A}=\frac{q}{a\times 1}=-\frac{5}{3}$$

速度方向向左。

◎ **3－11.** 三元不可压缩流场中，已知

$$v_x=x^2+y^2z^3,v_y=-(xy+yz+zx)$$

且已知 $z=0$ 处 $v_z=0$，试求流场中的 v_z 表达式。

[答：$v_z=-xz+\frac{z^2}{2}$]

分析　流场中应满足连续性方程　$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z}=0$。

解　由连续方程

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}z}=-(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}y})=-2x+x+z=z-x$$

积分　$$v_z=\frac{1}{2}z^2-xz+c \qquad ①$$

已知当 $z=0$ 时　$v_z=0$　代入 ① 得 $c=0$

∴　$$v_z=\frac{1}{2}z^2-xz$$



◎ **3－12.** 二元不可压缩流场中，已知圆周方向的分速度为 $v_\theta=-\frac{c}{r^2}\sin\theta$，试求径向分速度 v_r 与合速度 v。

[答：$v_r=-\frac{C}{r^2}\cos\theta, v=\frac{C}{r^2}$]

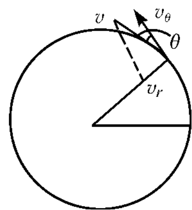


图 3－11

分析　对圆角运动，圆角速度分解如图 3－11 所示。

解　由图可知　$v_r=v_\theta/tg\theta=v_\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{C}{r^2}\cos\theta$

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\theta^2}=\sqrt{(-\frac{C}{r^2}\sin\theta)^2+(-\frac{C}{r^2}\cos\theta)^2}=\frac{C}{r^2}$$

◎ **3－13.** 水平放置的水管，直径由 $d_1=15\text{cm}$ 收缩到 $d_2=7.5\text{cm}$，已知 $p_1=4g\text{N/cm}^2$　$p_2=1.5g\text{N/cm}^2$（g 为重力加速度），不计损失，试求管中流量。

[答：$q_V=0.101\text{m}^3/\text{s}$]

分析　由伯努利方程 $\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$（管水平放置，$z_1=z_2$）。

解　由伯努利方程，可得

$$\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2) \quad ①$$

同时由连续性方程　$v_1\cdot\frac{1}{4}\pi d_1^2=v_2\cdot\frac{1}{4}\pi d_2^2=q_V$　②

即　$v_1d_1^2=v_2d_2^2$　③

由 ①③ 可解出 $v_1=5.715\text{m/s}$

将 v_1 代入 ② 得　$q_V=\frac{1}{4}\pi d_1^2v_1=\frac{1}{4}\pi\times0.15^2\times5.715$

$=0.101\text{m}^3/\text{s}$

◎ **3－14.** 用皮托静压管测量气体管道轴心的速度 v_{max}，皮托静压管与倾斜酒精差压计相连，$v_{max}=1.2\bar{v}$。

已知 $d=200\text{mm}$，$\sin\alpha=0.2$，$l=75\text{mm}$，气体密度为 1.66kg/m^3、酒精密度为 800kg/m^3，试求气体质量流量。（如图 3－12）

[答：$q_m = 0.52\text{kg/s}$]

分析　皮托管测流速由课本公式(3－96)，$v = \sqrt{2gH\frac{\rho'}{\rho}}$ 由此可算出速度，再求流量。

解　当为倾斜管时 $H = l\sin\alpha = 75 \times 0.2 = 15\text{mm}$

即　$H = 0.015\text{m}$

$$v_{\max} = \sqrt{2g \times 0.015 \times \frac{0.8 \times 10^3}{1.66}} = 11.91\text{m/s}$$

体积流量　$q_V = \bar{v} \cdot A = \frac{1}{4}\pi d^2 \times \frac{v_{\max}}{1.2}$

$$= \frac{1}{4}\pi \times 0.2^2 \times \frac{1}{1.2} \times 11.91$$

$$= 0.3118\text{m}^3/\text{s}$$

质量流量 $q_m = \rho q_V = 0.3118 \times 1.66 = 0.52\text{kg/s}$

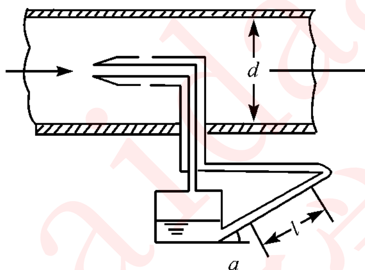


图 3－12

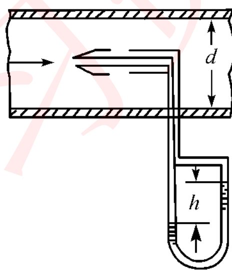


图 3－13

◎ **3－15.** 皮托静压管与汞差压计相连，借以测定水管中的最大轴向速度 $v_{\max}$，已知 $h = 400\text{mm}$，$d = 200\text{mm}$，$v_{\max} = 1.2\bar{v}$，试求管中的流量。(如图 3－13)

[答：$q_V = 261\ \text{l/s}$]

分析　由课本(3－95)式 $v = \sqrt{2gh(\frac{\rho' - \rho}{\rho})}$ 计算流速，再求流量。

解　最大轴向流速 $v_{\max} = \sqrt{2gH(\frac{\rho' - \rho}{\rho})}$

其中 $\rho' = 13.6 \times 10^3\text{kg/m}^3$　$\rho = 1 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$



$$v_{max}=\sqrt{2g\times 0.4\times\frac{13.6-1}{1}}=9.944\text{m/s}$$

体积流量　$$q_V=\bar{v}\cdot A=\frac{1}{4}\pi d^2\times\frac{v_{max}}{1.2}$$

$$=\frac{1}{4}\pi\times 0.2^2\times\frac{9.944}{1.2}$$

$$=0.261\text{m}^3/\text{s}=261\ \text{L/s}$$

◎ **3－16.** 油从铅直圆管向下流出。管直径 $d_1=10\text{cm}$，管口处的速度为 $v_1=1.4\text{m/s}$，试求管口下方 $H=1.5\text{m}$ 处的速度和油柱直径。(如图 3－14)

[答：$v_2=5.6\text{m/s}, d_2=5\text{cm}$]

分析　由伯努利方程、可求得管口下方2点处速度，再由连续性方程求得半径。

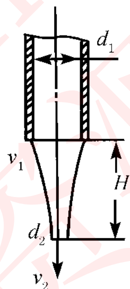


图 3－14

解　由伯努利方程，　$$\frac{v_1^2}{2g}+z_1=\frac{v_2^2}{2g}+z_2$$

即　$$v_2^2=v_1^2+2g(z_1-z_2)=v_1^2+2gH$$

$$=1.4^2+2\times 9.81\times 1.5$$

$$v_2=5.6\text{m/s}$$

由连续性方程　$$v_1\cdot\frac{1}{4}\pi d_1^2=v_2\cdot\frac{1}{4}\pi d_2^2$$

$$v_2 d_2^2=v_1 d_1^2$$

即　$$5.6\times d_2^2=1.4\times(0.1)^2$$

$$d_2=0.05\text{m}=5\text{cm}$$

◎ **3－17.** 潜艇水平运动时，前舱皮托管汞 U 形管上读数为 $h=17\text{cm}$，海水相对密度为 1.026，皮托管流速系数 $C_v=0.98$，试求潜艇航速。(如图 3－15)

[答：$v=6.266\text{m/s}$]

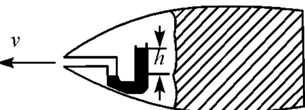


图 3－15

分析　皮托管测流速由课本(3－97)式 $v=C_v\sqrt{\frac{\rho'-\rho}{\rho}2gh}$。

解　$$v=0.98\sqrt{\left(\frac{13.6-1.026}{1.026}\right)\times 2\times 9.81\times 0.17}$$

$= 6.266\text{m/s}$

(其中汞的相对密度为 13.6)

◎ **3－18.** 水自下而上流动,已知:$d_1 = 30\text{cm}$,$d_2 = 15\text{cm}$,U 形管中装有汞,$a = 80\text{cm}$、$b = 10\text{cm}$,试求流量。(如图 3－16)

[答:$q_V = 0.091\text{m}^3/\text{s}$]

分析 由连续性方程和伯努利方程联立可求得 1,2 截面流速。

解 由连续性方程

$$v_1 \cdot \frac{1}{4}\pi d_1^2 = v_2 \cdot \frac{1}{4}\pi d_2^2$$

即 $$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2 \quad ①$$

由伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

由图 $$p_2 - p_1 = \rho_{汞} gb - \rho gb$$

$$z_2 - z_1 = a$$

得 $$\frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} + a + (\frac{\rho_{汞}}{\rho} - 1)b \quad ②$$

$$\rho_{汞} = 13.6 \times 10^3 \text{m}^3/\text{s} \quad \rho = 1 \times 10^3 \text{m}^3/\text{s}$$

代入数据解方程组 ①② 得 $v_1 = 1.287\text{m/s}$

$$q_V = \frac{1}{4}\pi d_1^2 v_1 = \frac{1}{4} \times \pi \times 0.3^2 \times 1.287$$

$$= 0.091\text{m}^3/\text{s}$$

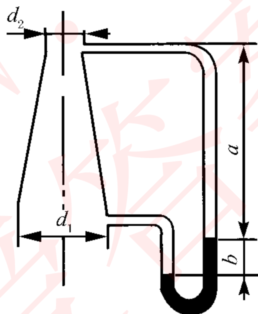


图 3－16

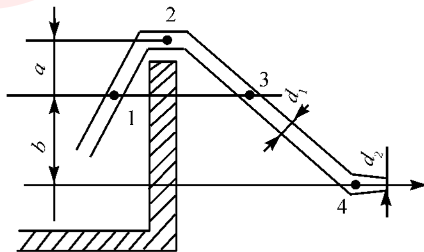


图 3－17



◎ **3－19.** 虹吸管直径 $d_1 = 10\text{cm}$，管路末端喷嘴直径 $d_2 = 5\text{cm}$，$a = 3\text{m}$，$b = 4.5\text{m}$，管中充满水流并由喷嘴射入大气，忽略磨擦，试求1、2、3、4点的计示压强。（如图3－17）

[答：$p_1 = -2.8\text{kPa}$，$p_2 = -32\text{kPa}$，$p_3 = -2.8\text{kPa}$，$p_4 = 41\text{kPa}$]

分析　先计算虹吸管出口流速，由连续性方程可求管内流速，通过伯努利方程计算各点压强。

解　虹吸管出口流速

$$v_2 = \sqrt{2gb} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.5} = 9.39\text{m/s}$$

由连续性方程

$$v_1 \cdot \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2$$

$$\therefore \quad v_1 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 \times 9.39 = 2.35\text{m/s}$$

由伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_2 = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_3$$

$$= \frac{p_4}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\therefore \quad p_4 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 4.1 \times 10^4\,\text{Pa} = 41\text{kPa}$$

$$p_3 = p_4 - \rho g z_3$$
$$= 4.1 \times 10^4 - 10^3 \times 9.81 \times 4.5$$
$$= -2.8 \times 10^3\,\text{Pa} = -2.8\ \text{kPa}$$

$$p_1 = p_3 = -2.8 \times 10^3\,\text{Pa} = -2.8 \times \text{kPa}$$

$$p_2 = p_1 - \rho g (z_2 - z_1)$$
$$= -2.8 \times 10^3 - 10^3 \times 9.81 \times 3$$
$$= -3.2 \times 10^4\,\text{Pa} = -32\text{kPa}$$

◎ **3－20.** 用U形汞差压计测量变截面水管中 A、B 两点的压强差。已知：$h = 10\text{cm}$，$H = 20\text{cm}$，试求水管水平与垂直两种情况下的压强差 $p_A - p_B$。（如图3－18）

[答：水平时 $p_A - p_B = 12.36\text{kPa}$，垂直时 $p_A - p_B = 14.32\text{kPa}$]



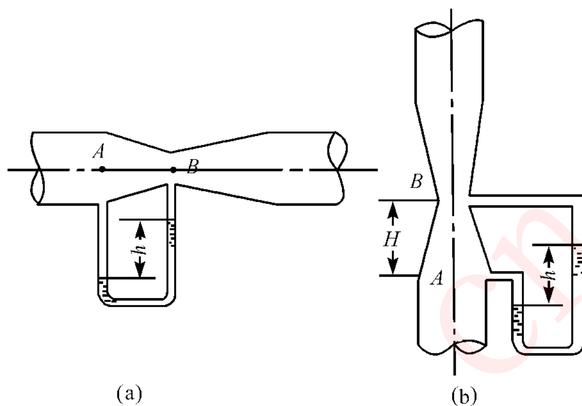


图 3－18

分析　此题只需要用静力学平衡即可求解。

解　当水平时，由静力平衡。

$$p_A + \rho_{汞} gh - \rho gh = p_B$$

$$p_B - p_A = (\rho_{汞} - \rho) gh$$

$$= (13.6 - 1) \times 10^3 \times 9.81 \times 0.1$$

$$= 12.36 \times 10^3 \text{Pa} = 12.36\text{kPa}$$

当垂直时

$$p_B - p_A = (\rho_{汞} - \rho) gh + \rho g H$$

$$= 12.36 \times 10^3 \times 9.81 \times 0.1 + 10^3 \times 9.81 \times 0.2$$

$$= 14.32 \times 10^3 \text{Pa} = 14.32\text{kPa}$$

◎ **3－21.** 倾斜水管上的文丘里流量计 $d_1 = 30\text{cm}$，$d_2 = 15\text{cm}$，倒 U 形差压计中装有相对密度为 0.6 的轻质不混于水的液体，其读数为 $h = 30\text{cm}$，收缩管中的水头损失为 d_1 管中速度水头的 20%，试求喉部速度 v_2 与管中流量 q_V。（如图 3－19）

［答：$v_2 = 1.574\text{m/s}$，$q_V = 0.027\ 8\text{m}^3/\text{s}$］

分析　利用连续性方程和带损失项伯努利方程求解。

解　连续方程　　$v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$　　①

带损失项伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + 20\% \frac{v_1^2}{2g} \quad ②$$



由 ① 带入 ② 得

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-0.8\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho g}+z_2\right)}$$

由图 $$\left(\frac{p_1}{\rho g}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho g}+z_2\right)=\frac{\rho'-\rho}{\rho}h$$

∴ $$v_2\sqrt{\frac{2g}{1-0.8\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}=\sqrt{\frac{\rho'-\rho}{\rho}h}$$

代入数据得 $v_2 = 1.574\text{m/s}$

$$q_V = \frac{1}{4}\pi d_2^2 \cdot v_2 = \frac{1}{4}\times\pi\times 0.15^2\times 1.574 = 0.0278\text{m}^3/\text{s}$$

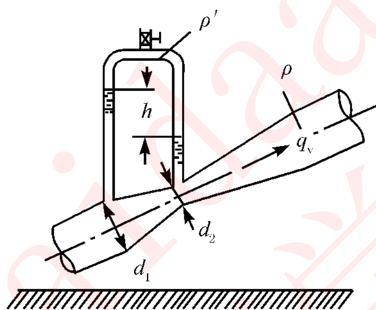


图 3－19

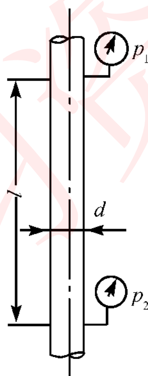


图 3－20

◎ **3－22.** 在铅直管道中有密度 $\rho = 900\text{kg/m}^3$ 的原油流动，管道直径 $d = 20\text{cm}$，在 $l = 20\text{m}$ 的两处读得 $p_1 = 196.2\text{kPa}$，$p_2 = 588.6\text{kPa}$。试问流动方向如何？损失水头多少？（如图 3－20）

[答：向上，$h_f = 24.4\text{m}$ 油柱]

分析　分别表示出 1，2 两处总机械能（水头）之差，即为损失水头。

解　$$H_1 - H_2 = \left(\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}+z_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+z_2\right)$$

由于管径不变，则 $v_1 = v_2$

由图 $z_1 - z_2 = l$

$$\therefore \quad H_1 - H_2 = \frac{1}{\rho g}(p_1 - p_2) + l$$

$$= \frac{1}{900 \times 9.81}(196.2 - 588.6) \times 10^3 + 20$$

$$= -24.4\text{m}$$

$\because H_1 - H_2 < 0$　故油是向上运动的

$$h_f = H_2 - H_1 = 24.4\text{m 油柱}$$

◎ **3－23.** 压气机进气管直径 $d = 200\text{mm}$，汞柱测压计读数为 $h = 20\text{mm}$，流量系数为 0.98，空气密度为 1.25kg/m^3，试求压气机的空气流量。(如图 3－21)

[答：$q_V = 2\text{m}^3/\text{s}$]

分析　利用公式(3－96)可计算其流速，及其流量先得到理论值再用系数修正。

解　由(3－96)　$v = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} 2gh}$

$$q_T = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot v$$

$$q_V = C_v q_T = \frac{1}{4} C_v \pi d^2 \cdot \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} 2gh}$$

代入数据：

$$q_V = \frac{1}{4} \times 0.98 \times \pi \times 0.2^2 \sqrt{\frac{13.6 \times 10^3}{1.25} \times 2 \times 9.8 \times 20 \times 10^{-3}}$$

$$= 2\text{m}^3/\text{s}$$

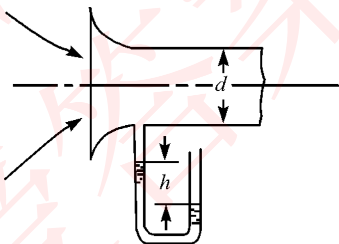


图 3－21

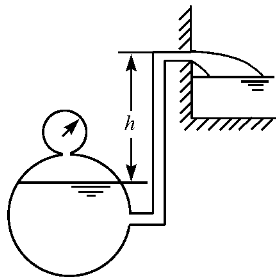


图 3－22



◎ **3－24.** 用密封水罐向 $h=2\text{m}$ 高处供水，要求供水量为 $q_V=15$ l/s，管道直径 $d=5\text{cm}$，水头损失为50cm水柱，试求水罐所需要的压强 p 是多少？（如图 3－22）

[答：53.66kPa]

分析 可先计算出口处的总水头，再加上水头损失，则为管内水头。

解 出口流速 $v=\dfrac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d^2}=\dfrac{15\times10^{-3}}{\frac{1}{4}\pi\times0.05^2}=7.64\text{m/s}$

出口处水头 $H_2=\dfrac{p_2}{\rho g}+z_2+\dfrac{v_2^2}{2g}=h+\dfrac{v_2^2}{2g}$

$$=2+\frac{7.64^2}{2\times9.81}=4.97\text{m}$$

管内水头 $H_1=H_2+0.5=5.47\text{m}$

$$H_1=\frac{p}{\rho g}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p}{\rho g}$$

∴ $p=\rho gH_1=5.366\times10^4\text{Pa}=53.66\text{kPa}$

● **3－25.** 已知 $d_A=15\text{cm}$，$d_B=7.5\text{cm}$，$a=2.4\text{m}$，水的流量 $q_V=0.02\text{m}^3/\text{s}$，$p_B-p_A=11\,772\text{N/m}^2$。

(1) 如果 AB 之间的水头损失表示为 $\zeta\dfrac{v_A^2}{2g}$，试求 ζ 值。

(2) 求汞差压计中的读数 h。（如图 3－23）

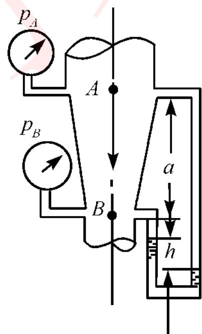


图 3－23

[答：$\zeta=3.4$，$h=9.5\text{cm}$]

分析 写出 A、B 两点带水头损失伯努利方程。

解 A、B 两点写出伯努利方程

$$-\xi\frac{v_A^2}{2g}+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}+z_A=\frac{p_B}{\rho g}+\frac{v_B^2}{2g}+z_B$$

$$v_A=\frac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_A^2}=\frac{0.02}{\frac{1}{4}\pi\times0.15^2}=1.13\text{m/s}$$

$$v_B=\frac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_A^2}=\frac{0.02}{\frac{1}{4}\pi\times0.075^2}=4.53\text{m/s}$$

$$(1-\xi)\frac{v_A^2}{2g}=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{1}{\rho g}(p_B-p_A)-(z_A-z_B)$$

$$=\frac{v_B^2}{2g}+\frac{1}{\rho g}(p_B-p_A)-a$$

代入数值

$$(1-\xi)\frac{1.13^2}{2g}=\frac{4.45^2}{2g}+\frac{1}{10^3\times 9.81}\times 11772-2.4$$

解得 $\xi=3.4$

由静力学： $p_B-p_A=(\rho_{汞}-\rho)gh$

得

$$h=\frac{p_B-p_A}{(\rho_{汞}-\rho)g}=\frac{11772}{(13.6-1)\times 10^3\times 9.8}=0.095\text{m}=9.5\text{ cm}$$

小结 本题是利用带损失的伯努利方程求解。

● **3－26.** 管道 $l=1\,500\text{m}$，$d_1=30\text{ cm}$，$H=200\text{m}$，$\lambda=0.02$，出口端的喷嘴出口直径 $d_2=5\text{cm}$，其流速系数为 $C_v=0.97$，试求水的射流速度 v_2、射流流量 q_V 和射流功率 P。(如图 3－24)

[答：$v_2=58.67\text{m/s}$，$q_V=0.115\text{m}^3/\text{s}$，$P=197.9\text{kW}$]

分析 此题仍可用连续性方程，带水头损失的伯努利方程求解。

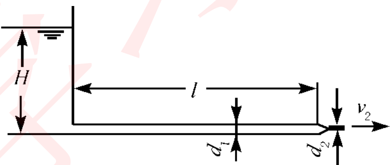


图 3－24

解 由连续性解得

$$v_1 d_1^2=v_2 d_2^2 \qquad ①$$

由伯努利方程得

$$\frac{v_2^2}{2g}=\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=H-\lambda\frac{l}{d_1}\frac{v_1^2}{2g} \qquad ②$$

将 ① 代入 ② 消去 v_1 得

$$\left[1+\lambda\frac{l}{d_1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\frac{v_2^2}{2g}=H$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2gH}{1+\lambda\frac{l}{d_1}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

代入数据，解出 $v_2=60.4\text{m/s}$



$$v_{2T} = c_v v_2 = 0.97 \times 60.4 = 58.6\text{m/s}$$

流量　　$q_V = \frac{1}{4}\pi d_2^2 \times v_2 = \frac{1}{4}\pi 0.05^2 \times v_{2T}$

$$= 0.115\text{m}^3/\text{s}$$

由公式(3－129)　　$P = \frac{\rho}{2} q_V v^2$

得　　$P = \frac{10^3}{2} \times 0.115 \times 58.6^2 = 1.97 \times 10^5\ \text{W}$

小结　本题是连续性方程的综合运用。

◎ **3－27.** 喷嘴直径 $d = 75\text{mm}$，水管直径 $D = 150\text{mm}$，水枪倾斜角 $\theta = 30°$，压强表读数 $h = 3\text{m}$ 水柱。试求水枪的出口速度 v，最高射程 H，最高点处的射流直径 d'。(如图 3－25)

[答：$v = 7.92\text{m/s}, H = 0.8\text{m}, d' = 81\text{mm}$]

分析　先计算出喷嘴出口速度 v，而后在空中作斜抛运动。

解　由公式(3－98)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}\sqrt{h} = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{150}{75}\right)^4 - 1}}\sqrt{3} = 1.98\text{m/s}$$

$$v = v_2 = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot v_1 = \left(\frac{150}{75}\right)^2 \times 1.98 = 7.92\text{m/s}$$

对速度进行分解　$v_x = v \cdot \cos\theta = 7.92 \times \cos 30° = 6.86\text{m/s}$

$$v_y = v \cdot \sin\theta = 7.92 \times \sin 30° = 3.96\text{m/s}$$

在最高点时　　$v_y' = 0; v' = v_x$

$$H = \frac{v_y^2}{2g} = 0.8\text{m}$$

由连续性方程　　$vd^2 = v'd'^2$

∴　　$d' = \sqrt{\frac{v}{v'}} \cdot d = \sqrt{\frac{v}{v_x}} d = \sqrt{\frac{7.92}{6.86}} \times 0.075$

$$= 0.081\text{m} = 81\ \text{mm}$$

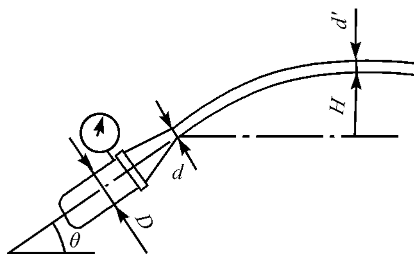


图 3－25

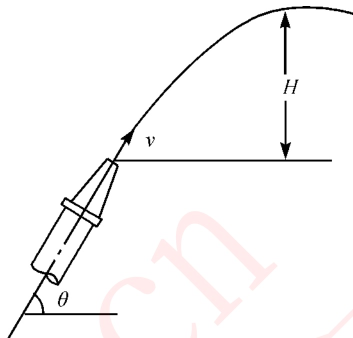


图 3－26

◎ **3－28.** 由喷嘴射出速度 $v = 7\mathrm{m/s}$ 的自由射流，欲达到 $H = 2\mathrm{m}$，试问喷嘴轴线的倾斜角 θ 是多少？（如图 3－26）

［答：$\theta = 63°30'$］

分析　射流后在空气中作斜抛运动，可利用斜抛运动知识计算。

解　对射出速度进行分解：

$$v_y = v\sin\theta$$

当达到最高点时　$v'_y = 0$

$$\therefore \quad H = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \cdot \sin^2\theta$$

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2gH}{v^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 2}{7^2}} = 0.895$$

$$\theta = 63.5° = 63°30'$$

◎ **3－29.** 在直径 $d = 1\mathrm{m}$ 的管道上安装有涡轮机，已知 $H = 45\mathrm{m}$，$h = 5\mathrm{m}$，涡轮机流量为 $q_V = 1\mathrm{m^3/s}$，进水管与出水管的水头损失分别为管中速度水头的 10 倍和 0.5 倍，试求涡轮机进、出口的压强及涡轮机所得到的功率。（如图 3－27）

［答：$p_1 = 4.3 \times 10^5\mathrm{Pa}$，$p_2 = -0.49 \times 10^5\mathrm{Pa}$，$P = 482\mathrm{kW}$］

分析　利用伯努利方程求解；滑轮机所得的能量等于进口总能量减去出口损失。

解　计算管内流速　$v = \dfrac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{4}\pi \times 1^2} = \dfrac{4}{\pi}$



进口管水头损失 $h_{f_1} = 10\dfrac{v^2}{2g} = 0.826\text{m}$

出口管水头损失 $h_{f_2} = 0.5\dfrac{v^2}{2g} = 0.0413\text{m}$

由伯努利关系式 $H + h = \dfrac{p_1}{\rho g} + \dfrac{v^2}{2g} + h + h_{f_1}$

$$\therefore \qquad p_1 = \rho g\left(H - \frac{v^2}{2g} - h_{f_1}\right)$$

代入数据 $\qquad p_1 = 4.3\times10^5\text{Pa}$

由出口管伯努利方程 $\dfrac{p_2}{\rho g} + h = h_{f_2}$

$$p_2 = -\rho g(h - h_{f_2}) = -10^3\times9.81\times(5-0.0413)$$
$$= -0.49\times10^5\text{Pa}$$

功率 $\quad P = (p_1 - p_2)q_v + \dfrac{\rho}{2}q_v v^2 - \rho g h_{f_2}\cdot q_v$

$$= [4.3-(0.49)]\times10^5\times1 + \frac{10^3}{2}\times1\times\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 -$$
$$10^3\times9.81\times0.0413\times1$$
$$= 4.82\times10^5\text{W} = 482\text{kW}$$

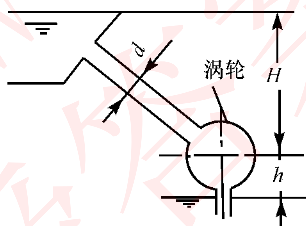


图 3－27

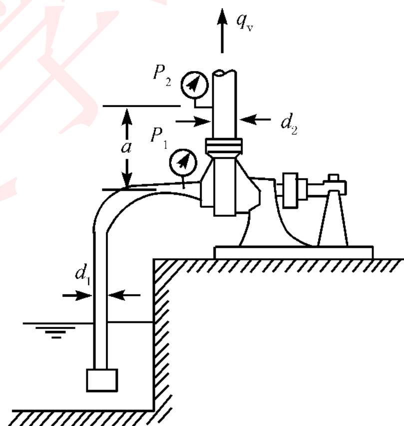


图 3－28

◎ **3－30.** 在离心水泵的实验装置上测得吸水管上的计示压强 p_1

$=-0.4g\times10^4\text{Pa}$，压水管上的计示压强 $p_2=2.8g\times10^4\text{Pa}$（$g$ 为重力加速度），$d_1=30\text{cm}$，$d_2=25\text{cm}$，$a=1.5\text{m}$，$q_V=0.1\text{m}^3/\text{s}$。试求水泵的输出功率。（如图 3－28）

[答：$P=32.96\text{kW}$]

分析　水泵的输出功率等于进出口的能量之差。

解　进口管速度　$v_1=\dfrac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}=\dfrac{0.1}{\frac{1}{4}\times\pi\times0.3^2}=1.415\text{m/s}$

出口管速度　$v_2=\dfrac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_2^2}=\dfrac{0.1}{\frac{1}{4}\times\pi\times0.25^2}=2.037\text{m/s}$

以进口位置作为参考高度，则进口总水头

$$H_1=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1}{\rho g}=\frac{1.415^2}{2g}+\frac{-0.4g\times10^4}{g\times10^3}=-3.9\text{m}$$

$$H_2=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{p_2}{\rho g}+z_2=\frac{2.037^2}{2g}+\frac{2.8g\times10^4}{g\times10^3}+1.5=29.7\text{m}$$

功率

$$\begin{aligned}P&=q_v\cdot\rho g\Delta H=q_v\cdot\rho g(H_2-H_1)\\&=0.1\times10^3\times9.8\times(29.7+3.9)\\&=3.296\times10^4\text{W}=32.96\text{ kW}\end{aligned}$$

◎ **3－31.** 水在 $p_1=5\,000\text{kPa}$ 压强下进入 $d_1=6\text{cm}$ 的管道，又在 $p_2=4\,500\text{kPa}$ 压强下离开 $d_2=3\text{cm}$ 的管道，此二断面的垂直距离（即出口比入口高出的距离）为 4m，流量 $q_V=42.4\times10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$，试求克服管道摩擦所消耗的功率。

[答：$P=1.88\text{kW}$]

分析　分析同上，摩擦消耗功率等于进出口能量之差。

解　进口速度

$$v_1=\frac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}=\frac{42.4\times10^{-4}}{\frac{1}{4}\pi\times0.06^2}=1.50\text{m/s}$$

$$v_2=\frac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_2^2}=\frac{42.4\times10^{-4}}{\frac{1}{4}\pi\times0.03^2}=6.00\text{m/s}$$



选择进口高度为参考高度，即 $z_1 = 0$

进口总压头 $$H_1 = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}$$

出口总压头 $$H_2 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

摩擦力功率

$$P = q_V \cdot \rho g \Delta H = q_V \cdot \rho g (H_1 - H_2)$$

$$= q_V \cdot \left[(p_1 - p_2) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) - \rho g z_2\right]$$

$$= 42.4 \times 10^{-4} \left[(5000 - 4500) \times 10^3 + \frac{10^3}{2}\right.$$

$$\left.(1.5^2 - 6^2) - 10^3 \times 9.81 \times 4\right]$$

$$= 1.88 \times 10^3\,\text{W} = 1.88\,\text{kW}$$

◎3－32. 试确定突然扩大的直径比$\dfrac{D}{d}$，以保证测压管的读数 Δh 可以得到极大值。（如图 3－29）

［答：$\dfrac{D}{d} = \sqrt{2}$］

分析　对突然扩大管，水头损失由课本(3－120)式 $h_f = \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$，由课本(3－118)式求极值。

解　由连续性方程

$$v_2 = v_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

由(3－118)式

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{g}(v_2^2 - v_1 v_2)$$

$$= \frac{1}{g} v_1^2 \left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]$$

∴ $$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{g} v_1^2 \left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - \left(\frac{D}{d}\right)^2\right]$$

令 $$k = \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

$$\frac{\partial(\Delta h)}{\partial k}=0 \quad 得 \quad k=2$$

$$\therefore \qquad \frac{D}{d}=\sqrt{2}$$

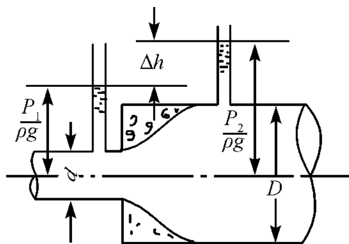


图 3－29

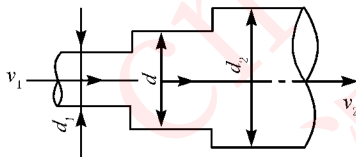


图 3－30

● **3－33.** 从 d_1 变成 d_2 的突然扩大损失为 $\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}$。为了减少损失，在 d_1 与 d_2 的管道之间再加一个尺寸 d 的管道，试问 d 取何值可使整体的损失为最小?此最小损失为多少?(如图 3－30)

[答：$d=\frac{\sqrt{2}d_1d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}}, h_f=\frac{1}{2}\left[\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}\right]$]

分析　总的损失等于两部分之和，求导可计算极值。

解　$d_1 \sim d$ 的损失　$h_{f_1}=\frac{(v_1-v)^2}{2g}$

由连续性方程　$v_2=v_1\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$　$h_{f_1}=\frac{v_1^2}{2g}\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]^2$

同理 $d \sim d_2$ 的损失　$v_2=v\left(\frac{d}{d_2}\right)^2$

$$h_{f_2}=\frac{(v-v_2)^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}\left[\left(\frac{d}{d_2}\right)^2-1\right]^2$$

总损失 $h_f=h_{f_1}+h_{f_2}$

$$=\frac{v_1^2}{2g}\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]^2+\frac{v_2^2}{2g}\left[\left(\frac{d}{d_2}\right)^2-1\right]^2$$

$$=\frac{v_1^2}{2g}\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]^2+\frac{v_1^2}{2g}\cdot\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\left[\left(\frac{d}{d_2}\right)^2-1\right]^2$$



$$= \frac{v_1^2}{2g}\left\{\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]^2+\left[\left(\frac{d}{d_1}\right)^2-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right]\right\}^2 \quad ①$$

令

$$k = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2$$

$$\frac{\partial h_f}{\partial k} = 0 \quad 即 \quad \frac{\partial}{\partial k}\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\left[k-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2\right]\right\} = 0$$

$$k = \frac{2d_2^2}{(d_1^2+d_2^2)} \quad ②$$

$$d = d_1\sqrt{k} = \frac{\sqrt{2}d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}} \quad ③$$

将②代入①得

$$h_f = \frac{1}{2}\left[\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}\right]$$

小结　本题中涉及到连续性方程、损失求和和极值问题，综合性较强。

● **3－34.** 在水平平面上的45°弯管，入口直径 $d_1=600\text{mm}$，出口直径 $d_2=300\text{mm}$，入口压强 $p_1=140\text{kPa}$，流量 $q_V=0.425\text{m}^3/\text{s}$，忽略摩擦，试求水对弯管的作用力。（如图3－31）

［答：$F=38.46\text{kN}$，力的方向与 x 轴夹角 $\theta=2°42'$］

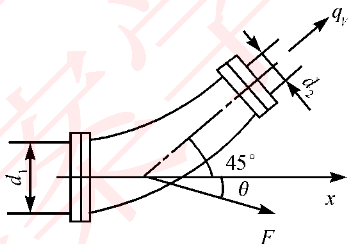


图3－31

分析　对管的作用力可用课本（3－108）式计算。

解　进口速度　$v_1=\dfrac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_1^2}=\dfrac{0.425}{\frac{1}{4}\pi\times0.6^2}$

$$=1.5\text{m/s}$$

出口速度 $v_2 = \dfrac{q_V}{\frac{1}{4}\pi d_2^2} = \dfrac{0.425}{\frac{1}{4}\pi \times 0.3^2}$

$= 6.0\text{m/s}$

由伯努利方程

$p_2 = p_1 + \dfrac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$

$= 140 \times 10^3 + \dfrac{1}{2} \times 10^3 \times (1.5^2 - 6.0^2)$

$= 123.125 \times 10^3 \text{Pa}$

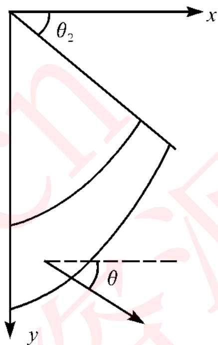


图 3－32

$A_1 = \dfrac{1}{4}\pi d_1^2 = 0.2827\text{m}^2$

$A_2 = \dfrac{1}{4}\pi d_2^2 = 0.0707\text{m}^2$

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = 45°$$

由课本(3－108)式

$$\begin{cases} F_{Rx} = p_1 A_1 \cos\theta_1 - p_2 A_2 \sin\theta_2 + \rho q_V (v_1 \cos\theta_1 - v_2 \sin\theta_2) \\ F_{Ry} = p_2 A_2 \cos\theta_2 - p_1 A_1 \sin\theta_1 + \rho q_V (v_2 \cos\theta_2 - v_1 \sin\theta_1) \end{cases}$$

代主数值 $\begin{cases} F_{Rx} = 1.81 \times 10^3 \text{N} \\ F_{Ry} = 3.842 \times 10^4 \text{N} \end{cases}$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 3.846 \times 10^4 \text{N} = 38.46\text{kN}$$

$$\theta = \arctan\frac{F_{Rx}}{F_{Ry}} = \arctan\frac{1.81 \times 10^3}{3.842 \times 10^4} = 2.7° = 2°42'$$

小结 本题中需注意合力分力。

● **3－35.** 量水桶放在磅秤上，若在水由垂直上方落入桶中的同时测量水桶的重力 W，问它比水桶的实际重力 W_0 相差多少？已知管断面面积为 a，管出口处的速度是 v，管出口到水面的距离为 H，水桶断面面积为 A。(如图 3－33)

[答：$W = W_0 + \rho v a\left(\sqrt{v^2 + 2gH} + v\dfrac{a}{A}\right)$]

分析 测量水桶重力 W，包含实际重力 W_0 和水的动量产生的力。



解　水落入水桶的速度由伯努利方程

$$\frac{v'^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}+H$$

$$v'=\sqrt{v^2+2gH}$$

用 a' 表示接触面积：由连续性方程有 $va=v'a'$

由课本(3－105)式

$$F=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v''dv+\oiint \rho v'(v'da')$$

$$\oiint \rho v'(v'\cdot da')=\int_{a'}\rho v'(v'da')=\rho v'v'a'=\rho v'va$$

$\because$　$v''=\frac{a}{A}v$　表示流入桶后的速度

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho v''dv=\rho v''va=\rho va\cdot v\frac{a}{A}$$

$\therefore$　$W-W_0=F=\rho va\cdot v'+\rho va\cdot v''$

$$=\rho va\left(\sqrt{v^2+2gh}+v\frac{a}{A}\right)$$

$$\therefore W=W_0+\rho va\left(\sqrt{v^2+2gh}+v\frac{a}{A}\right)$$

小结　这里的重力 W，包含了实际重力和水的动量产生的力。

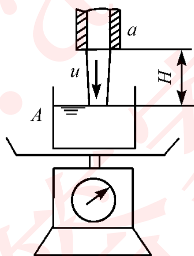


图 3－33

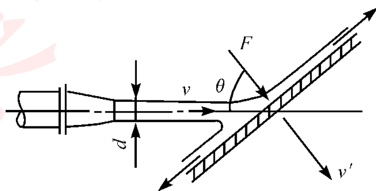


图 3－34

◎3－36. 水射流直径 $d=4\text{cm}$，速度 $v=20\text{m/s}$，平板法线与射流方向的夹角 $\theta=30°$，平板沿其法线方向运动速度 $v'=8\text{m/s}$。试求作用在平线法线方向上的力 F。(如图3－34)



$$\left[答：F = \rho \frac{\pi}{4} d^2 \frac{(v\cos\theta - v')^2}{\cos\theta} = 125.96\text{N}\right]$$

分析　由动量定理(3－107)式计算。

解　以板方向为 x 方向，重直于板为 y 方向，选择分叉点的虚线作研究

则(3－107)式　$\sum F_y = \rho q_V (v' - v\cos\theta)$

$$q_V = (v - \frac{v'}{\cos\theta}) \cdot A = (v - \frac{v'}{\cos\theta}) \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\therefore \qquad \sum F_y = \rho \frac{\pi}{4} d^2 \frac{(v\cos\theta - v')^2}{\cos\theta}$$

由作用力与反作用力的关系，板受力　$F = \sum F_y$

$$\therefore \qquad F = -\rho \frac{\pi}{4} d^2 \frac{(v\cos\theta - v')^2}{\cos\theta}$$

代入数据　　$F = 125.96\text{N}$

◎ **3－37.** 将锐边平板插入水的自由射流中，并使平板与射流垂直，该平板将射流分成两股，已知射流速度 $v = 30\text{m/s}$，总流量 $q_V = 36\ \text{l/s}$，$q_{V_1} = \frac{1}{3} q_V$，$q_{V_2} = \frac{2}{3} q_V$，试求射流偏转角 α 及射流对平板的作用力 F_R。(如图 3－35)

[答：$\alpha = 30°$，$F_R = 456.5\text{N}$]

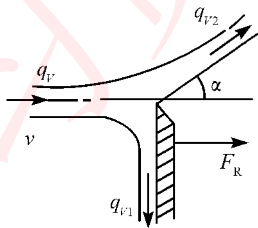


图 3－35

分析　在竖直方向上，水的动量守恒，在水平方向上，由动量定理求板受力。

解　由伯努利方程：$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}$　得 $v_1 = v_2 = v$

在竖直方向上，由动量守恒　$q_{V_1} \cdot v_1 = q_{V_2} \cdot v_2 \cdot \sin\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{q_{V_1} \cdot v_1}{q_{V_2} \cdot v_2} = \frac{\frac{1}{3} q_V \cdot v}{\frac{2}{3} q_V \cdot v} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \qquad \alpha = 30°$$

由课本(3－107)式



$$\sum F_x = \int_{A_2} \rho V_2 \cdot v'_2 \mathrm{d}A - \int_A \rho v \cdot V \mathrm{d}A$$
$$= \rho q_{V_2} \cdot v'_2 - \rho q_V \cdot v$$
$$= \rho q_{V_2} \cdot v\cos\alpha - \rho q_V \cdot v$$

$$F_R = -\sum F_x = \rho q_V \cdot v - \rho q_{V_2} v\cos\alpha = \rho q_V v(1 - \frac{2}{3}\cos\alpha)$$
$$= 10^3 \times 36 \times 10^{-3} \times 30(1 - \frac{2}{3}\cos 30°)$$
$$= 456.5\mathrm{N}$$

◎ **3－38.** 喷射推进船航行速度 $v_1 = 54\mathrm{km/h}$，推进力 $F = 4\,000\mathrm{N}$，出口面积 $A = 0.02\mathrm{m}^2$，试求射流出口的速度 v_2 及推进装置的效率 η。(如图 3－36)

[答：$v_2 = 23.5\mathrm{m/s}$，$\eta = 0.46$]

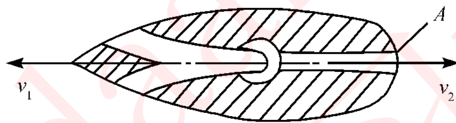


图 3－36

分析　由动量定理可建立推动力与水流速之间关系。

解　由课本(3－106)式，$\sum F_x = \rho q_V(v_2 - v_1) = \rho A v_2(v_2 - v_1)$

由作用力与反作用力关系

$$\sum F_x = F;\ v_1 = 54\mathrm{km/h} = 15\mathrm{m/s}$$

因此 $F = \rho A v_2(v_2 - v_1)$

即　$4000 = 10^3 \times 0.02 v_2(v_2 - 15)$

解得　$v_2 = 23.5\mathrm{m/s}$

◎ **3－39.** 边长 $b = 30\mathrm{cm}$ 的正方形铁板闸门，上边铰链连接于 O，其重力为 $W = 117.7\mathrm{N}$，水射流直径 $d = 2\mathrm{cm}$ 的中心线通过闸板中心 C，射流速度 $v = 15\mathrm{m/s}$。

(1) 为使闸门保持垂直位置，在其下边应加多大的 F 力？

(2) 撤消 F 力后，闸门倾斜角 θ 是多少？忽略铰链摩擦。(如图 3－37)

[答：$F = 35.3\mathrm{N}$，$\theta = 36°52'$]

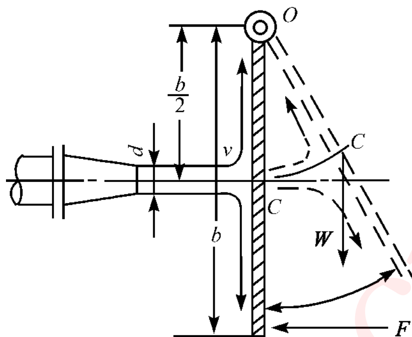


图 3－37

分析　本题利用动量定理(3－107)式计算水流对板的作用力。

解　(1) 当板垂直时 $v'=0$，由(3－107)

$$\sum F_x=\rho q_v(v'-v)=-\rho q_v v=-\rho\frac{\pi}{4}d^2v^2$$

$$=-10^3\times\frac{\pi}{4}\times0.02^2\times15^2$$

$$=-70.68\text{N}$$

水对板的作用力与 $\sum F_x$ 大小相等，$F_c=-\sum F_x$ 作用点在 C 点

由板动量矩平恒　$F_c\cdot\dfrac{b}{2}=Fb$

$$\therefore\qquad F=\frac{1}{2}F_c=\frac{1}{2}\times70.68=35.3\text{N}$$

(2) 以平行板为 x 轴，垂直板为 y 轴

由题 3－36 推导得

$$F=\rho\frac{\pi}{4}d^2\frac{(v\cos\theta-v')^2}{\cos\theta}$$

本题中板不动，则 $v'=0$

$$F_y=\rho\frac{\pi}{4}d^2v^2\cos\theta$$

$$=10^3\times\frac{\pi}{4}\times0.02^2\times15^2\times\cos\theta$$



$$= 70.68\cos\theta$$

由力矩平恒

$$F_y \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos\theta} = w \cdot \frac{b}{2}\operatorname{tg}\theta$$

$$\sin\theta = \frac{F_y}{w} = \frac{70.68}{117.7}$$

$$\theta = 36°52'$$

● **3－41.** 1－1 为叶轮机入口，2－2 为叶轮机出口，u 代表牵连速度，ω 代表相对速度，v 代表绝对速度。

已知：$u_1 = u_2 = 15\text{m/s}$，$v_1 = 45\text{m/s}$，v_1、u_1 之间的夹角 $\alpha_1 = 20°$

$\omega_2 = 0.9\omega_1$，v_2、u_2 之间的夹角 $\alpha_2 = 90°$，试求：

(1)ω_1 与 u_1 的夹角 β_1，ω_2 与 u_2 的夹角 β_2

(2) 叶轮机的扬程 H

(3) 叶轮机的效率 $\eta = \dfrac{H}{v_1^2/(2g)}$(如图 3－38)

[答：$\beta_1 = 29°24'$，$\beta_2 = 58°54'$，$H = 64.66\text{m}$，$\eta = 62.65\%$]

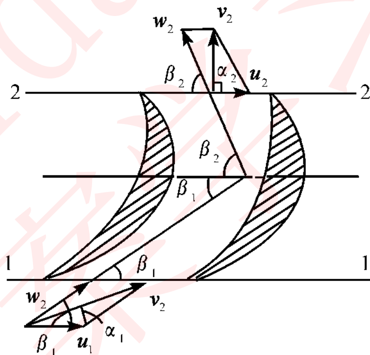


图 3－38

分析　利用速度合成，几何知识，计算进出口的 u，v，w，由课本(3－89) 式可计算叶轮机扬程。

解　(1)u，v，w，满足速度合成平行四边形关系

则
$$\begin{cases} w_1\sin\beta_1 = v_1\sin\alpha_1 \\ u_1 + w_1\cos\beta_1 = v_2\cos\alpha_1 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} w_1\sin\beta_1 = 45\sin20° = 15.39 \\ 15 + w_1\cos\beta_1 = 45\cos20° = 42.29 \end{cases}$

解得 $\beta_1 = 29.4° = 29°24'$

$$w_1 = 31.35\text{m/s}$$

$$w_2 = 0.9w_1 = 28.22\text{m/s}$$

$$\cos\beta_2 = \frac{u_2}{w_2} = \frac{15}{28.22} = 0.5316$$

$$\beta_2 = 58.9° = 58°54'$$

(2) 由课本(3－89)式 $H = \dfrac{1}{g}(v_2 u_2 \cos\alpha_2 - v_1 u_1 \cos\alpha_1)$

∵ $\alpha_2 = 90°$

∴ $H = -\dfrac{1}{g}u_1 v_1 \cos\alpha_1$

$$= -\frac{1}{9.81} \times 15 \times 45 \times \cos20°$$

$$= -64.66\text{m}$$

(3) 叶轮机效率 $\eta = \dfrac{H}{v_1^2/(2g)}$

即 $\eta = \dfrac{64.66}{45^2/(2 \times 9.81)} = 0.6265 = 62.65\%$

小结 解题需注意牵连速度、相对速度、绝对速度之间的关系。

◎3－42. 直径为 $d = 4\text{cm}$，速度为 $v = 30\text{m/s}$ 的水射流，在叶片一端流入，从另一端流出，速度大小不变，但方向随叶片而偏转，试求下列两种情况射流对叶片作用力。(如图 3－39)

(1)$\alpha = \beta = 30°$，(2)$\alpha = 0$，$\beta = 60°$。

[答：(1)$F = F_x = 1\,958\text{N}$，$\theta = 0$

(2)$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1\,958\text{N}$，$\theta = \arctan\dfrac{F_y}{F_x} = -30°$]

分析 利用课本(3－107)式计算射流的冲击力。

解 (1) $q_V = \dfrac{1}{4}\pi d^2 v = \dfrac{1}{4} \times \pi \times 0.04^2 \times 30 = 0.0377\text{m}^3/\text{s}$

当 $\alpha = \beta = 30°$ 时



$$F_x = \rho q_V (v_{2x} - v_{1x})$$
$$= \rho q_V (v\cos\beta + v\cos\alpha)$$
$$= 2\rho q_V v\cos30^\circ$$

即　$F_x = 2 \times 10^3 \times 0.377 \times 30 \times \cos30^\circ = 1958\text{N}$

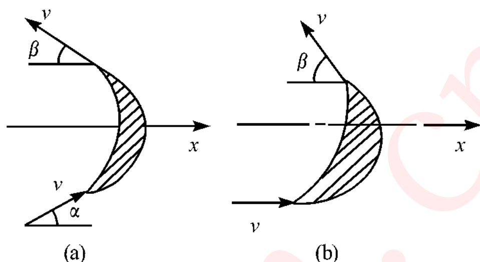


图 3－39

$$F_y = \rho q_V (v_{2y} - v_{1y})$$
$$= \rho q_V (v\sin\beta - v\sin x)$$
$$= 0$$

∴　$F = F_x = 1958\text{N}$

（2）当 $\alpha = 0$　$\beta = 60^\circ$ 时

$$F_x = \rho q_V (v_{2x} - v_{1x})$$
$$= \rho q_V (v\cos\beta + v)$$
$$= \rho q_V v(\cos60^\circ + 1)$$

即　$F_x = 10^3 \times 0.0377 \times 30 \times (\frac{1}{2} + 1) = 1696.5\text{N}$

$$F_y = \rho q_V (v_{2y} - v_{1y})$$
$$= \rho q_V (-v\sin\beta - 0)$$
$$= -\rho q_V v\sin60^\circ$$

即　$F_y = -10^3 \times 0.0377 \times 30 \times \sin60^\circ = -979.5\text{N}$

得：　$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1958\text{N}$

$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = 30^\circ$$

●3－44. 离心式鼓风机叶轮内径 $d_1 = 12.5\text{cm}$，外径 $d_2 = 30\text{cm}$，叶轮流道宽度 $B = 2.5\text{cm}$，叶轮转速 $n = 1\ 725\text{r/min}$，流量 $q_V =$

372m³/h，入口温度 $t_1 = 20℃$，入口绝对压强 $p_1 = 97\ 000\text{Pa}$。用 α_1，α_2 表示气流的入口与出口的气流方向角（即绝对速度 v 与牵连速度 u 之间的夹角），用 β_1，β_2 表示入口与出口的叶片安装角（即相对速度 ω 与切线之间的锐角）。

已知：$\alpha_1 = 90°$，$\beta_2 = 30°$，气流按不可压缩流体计算。（如图 3－40）

试求：(1) 入口气流速度 v_1 与入口安装角 β_1

(2) 出口气流速度 v_2 与出口气流角 α_2

(3) 叶轮机的扭矩和功率

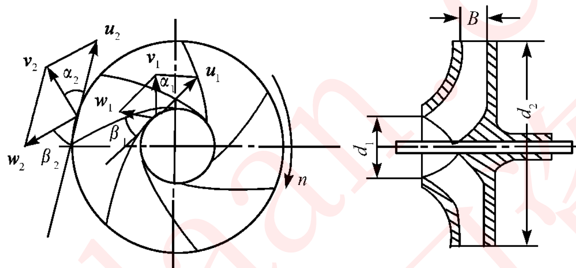


图 3－40

［答：$v_1 = 10.5\ \text{m/s}$，$\beta_1 == 43°$；$v_2 = 20\text{m/s}$，$\alpha_2 = 14°$；$T = 0.346\text{Nm}$，$P = 62.5\text{W}$］

分析　用相对运动的伯努利方程或动量矩方程都可以分析此类叶轮机的问题，解题中理清相对速度、牵连速度、绝对速度之间的关系是关键。

解　(1) $v_1 = \dfrac{q_V}{\pi d_1 B} = \dfrac{372/60^2}{3.14 \times 0.125 \times 0.025} = 10.5\text{m/s}$

$$u_1 = \frac{1}{2}d_1 w = \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{n\pi}{30} = \frac{1}{2} \times 0.125 \times \frac{3.14 \times 175}{30}$$

$$= 11.28\text{m/s}$$

$$\therefore \beta_1 = \arctan\frac{v_1}{n_1} = 43°$$

(2) 由正弦定理知 $\dfrac{v_2}{\sin\beta_2} = \dfrac{u_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}$

即 $v_2 = \dfrac{n_2 \sin\beta_2}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)}$



又 $v_2 = \dfrac{q_V}{\pi d_2 B\sin\alpha_2}$

以上两式联立，代入数据解得：$\alpha_2 = 14°$

$\therefore v_2 = \dfrac{u_2 \sin 30°}{\sin 44°} = 20\text{m/s}$

$(3) M = \rho q_V (r_2 v_2 \cos\alpha_2 - r_1 v_1 \cos\alpha_1)$

$= \rho q_V \dfrac{1}{2}(d_2 v_2 \cos\alpha_2 - d_1 v_1 \cos\alpha_1)$

又 $\dfrac{p}{\rho} = R_g T, \therefore \rho = \dfrac{p}{R_g T} = \dfrac{97\ 000}{287 \times 293} = 1.153\ 5\text{kg/m}^3$

$\therefore M = 1.153\ 5 \times \dfrac{372}{60^2} \times \dfrac{1}{2} \times (0.3 \times 20 \times \cos 14° - 0.125 \times 10.5 \times \cos 90°$

$= 0.346\text{Nm}$

$\therefore P = M\omega = 0.346 \times 172\ 5 \times \dfrac{3.14}{30} = 62.5\text{W}$

● **3－45.** 旋转式喷水器由三个均布在水平平面上的旋转喷嘴组成；总供水量为 q_V，喷嘴出口截面积为 A，旋臂长为 R，喷嘴出口速度方向与旋臂的夹角为 θ。

(1) 不计一切摩擦，试求旋臂的旋转角速度 ω

(2) 如果使已经有 ω 角速度的旋臂停止，需要施加多大的外力矩 M?(如图 3－41)

[答：$\omega = \dfrac{q_V}{3AR}\sin\theta$；$M = \dfrac{\rho R q_V^2}{3A}\sin\theta$]

分析　要让旋臂停止，施加力矩等于其产生的力矩，可由课本式(3－134)计算其产生力矩。

解　(1) 每个喷嘴流量　$q'_V = \dfrac{q_V}{3}$

喷嘴流速　$v = \dfrac{q'_V}{A} = \dfrac{q_V}{3A}$

在切向方向的速度　$v_\theta = \dfrac{q_V}{3A}\sin\theta$

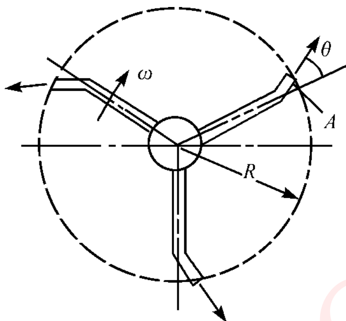


图 3—41

由 $v_\theta = \omega R$ 得角速度 $\omega = \frac{v_\theta}{R} = \frac{q_V}{3AR}\sin\theta$

(2) 由(3—134)式变形式

$$M = \oiint_A \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) v \mathrm{d}A$$

$$= \rho q_V R v_\theta$$

$$= \rho q_V R \frac{q_V}{3A}\sin\theta$$

$$= \frac{\rho R q_V^2}{3A}\sin\theta$$

小结 本题是求旋转式喷水器的力矩,用到了课本(3-134)式的变形式,$M = \oiint_A \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) v \mathrm{d}A$